7　分数関数・無理関数

基本問題 ＆ 解法のポイント

11

$$y=\frac{4x+1}{2x-1}$$
$$=\frac{2(2x-1)+3}{2x-1}$$
$$=2+\frac{3}{2x-1}$$
$$=2+\frac{\frac{3}{2}}{\frac{2x-1}{2}}$$
$$=2+\frac{\frac{3}{2}}{x-\frac{1}{2}}$$

よって，$y=\frac{\frac{3}{2}}{x}$ を x 軸方向に $\frac{1}{2}$，y 軸方向に 2 だけ平行移動したものであり，

この曲線の漸近線の方程式は $x=\frac{1}{2}$，$y=2$ である。

12

$y=\sqrt{2x-3}+1$ のグラフは次図青色実線のようになる。

したがって，$y=mx+2$ が点 $\left(\frac{3}{2},1\right)$ を通るとき傾き m は最小となる。

よって，$1=m\cdot\frac{3}{2}+2$ より，m の最小値は $-\frac{2}{3}$　・・・①

また，m が最大となるのは，$y=\sqrt{2x-3}+1$ と $y=mx+2$ が接するときである。

接点の x 座標は $\sqrt{2x-3}+1=mx+2$ すなわち $mx+1=\sqrt{2x-3}$ を満たす。

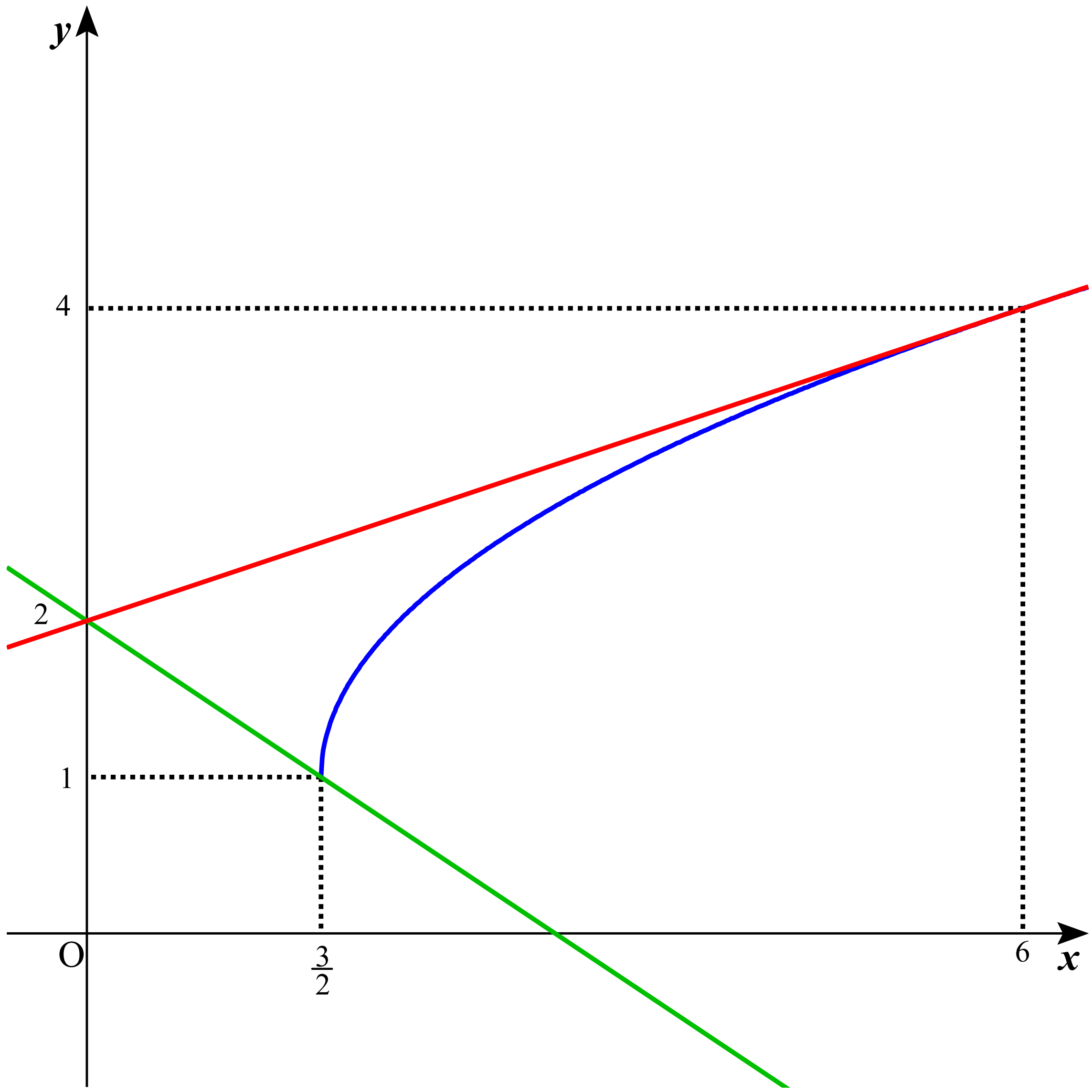
この両辺を 2 乗して整理すると，$m^2x^2+2(m-1)x+4=0$

判別式を D とすると，$\frac{D}{4}=(m-1)^2-m^2\cdot4=-(3m-1)(m+1)$

接点の x 座標はこの方程式の重解だから，$D=0$

これと①より，$m=\frac{1}{3}$　・・・②

①，②より，m の値の範囲は $-\frac{2}{3}\le m\le\frac{1}{3}$


y
4
2
1
O
3/2
6
x

A

37

(1)

点$(1,\ 0)$を通るから，$0=\dfrac{a+b}{2\cdot 1+1}$より，$a+b=0$　・・・②

$$
\begin{aligned}
y&=\frac{ax+b}{2x+1}\\
&=\frac{\frac{a}{2}(2x+1)-\frac{a}{2}+b}{2x+1}\\
&=\frac{a}{2}+\frac{-a+2b}{2(2x+1)}
\end{aligned}
$$

より，

$y=\dfrac{a}{2}$を漸近線にもつ。

これが$y=1$だから，$\dfrac{a}{2}=1$より，$a=2$　・・・③

②，③より，$b=-2$

ゆえに，$(a,\ b)=(2,\ -2)$

(2)

(1)より，①のグラフの式は$y=\dfrac{2x-2}{2x+1}=1-\dfrac{3}{2x+1}$

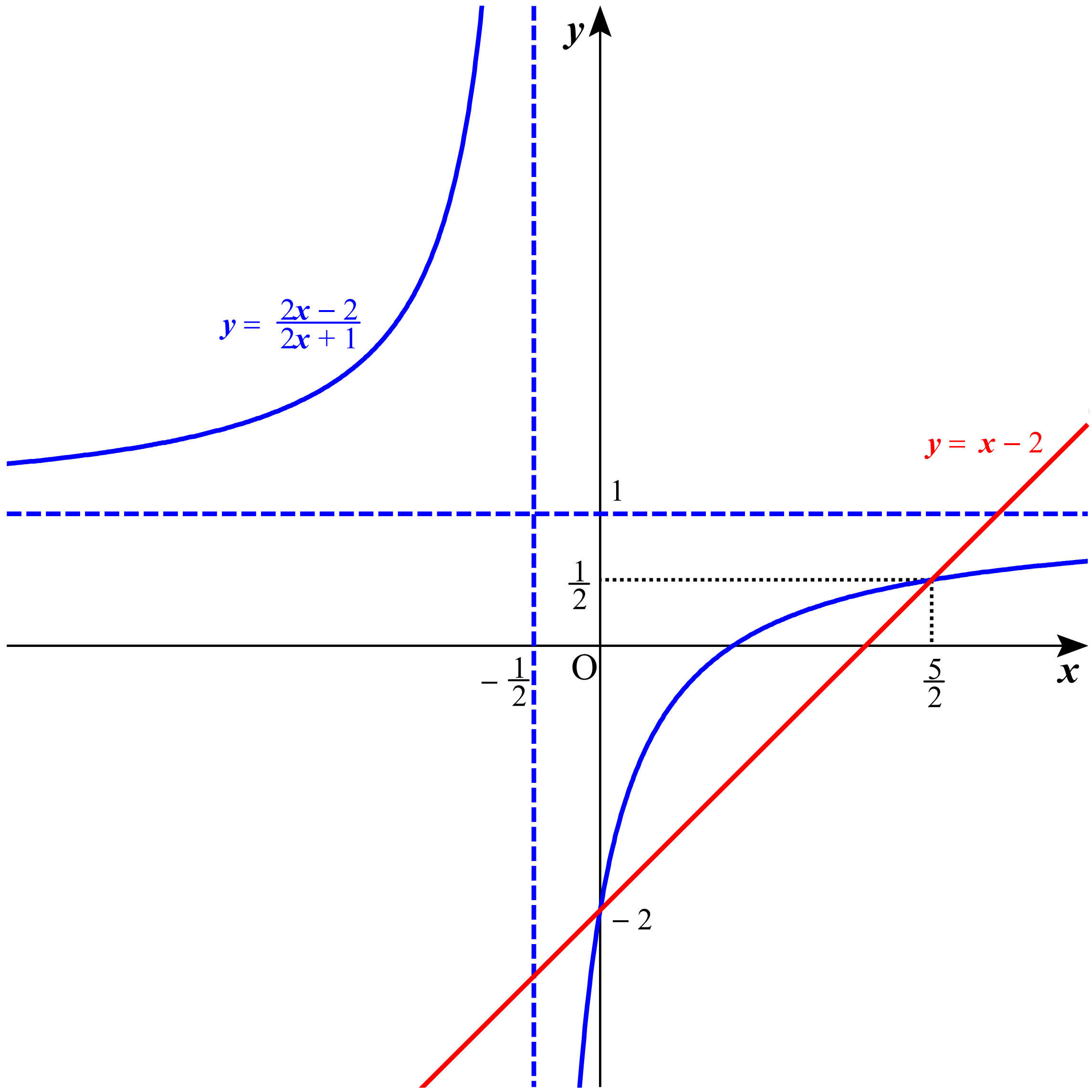
$y=x-2$と①のグラフとの交点は$x-2=\dfrac{2x-2}{2x+1}$を満たすから，

$(x-2)(2x+1)=2x-2$より，$x(2x-5)=0$　$\therefore x=0,\ \dfrac{5}{2}$

ゆえに，交点の座標は$(0,\ -2),\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

以上より，①と$y=x-2$のグラフは次のようになる。

ゆえに，$\dfrac{2x-2}{2x+1}>x-2$の解は$x<-\dfrac{1}{2},\ 0<x<\dfrac{5}{2}$



y
x
O
$y = \frac{2x-2}{2x+1}$
$y = x - 2$
1
$\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$
$\frac{5}{2}$
-2

38

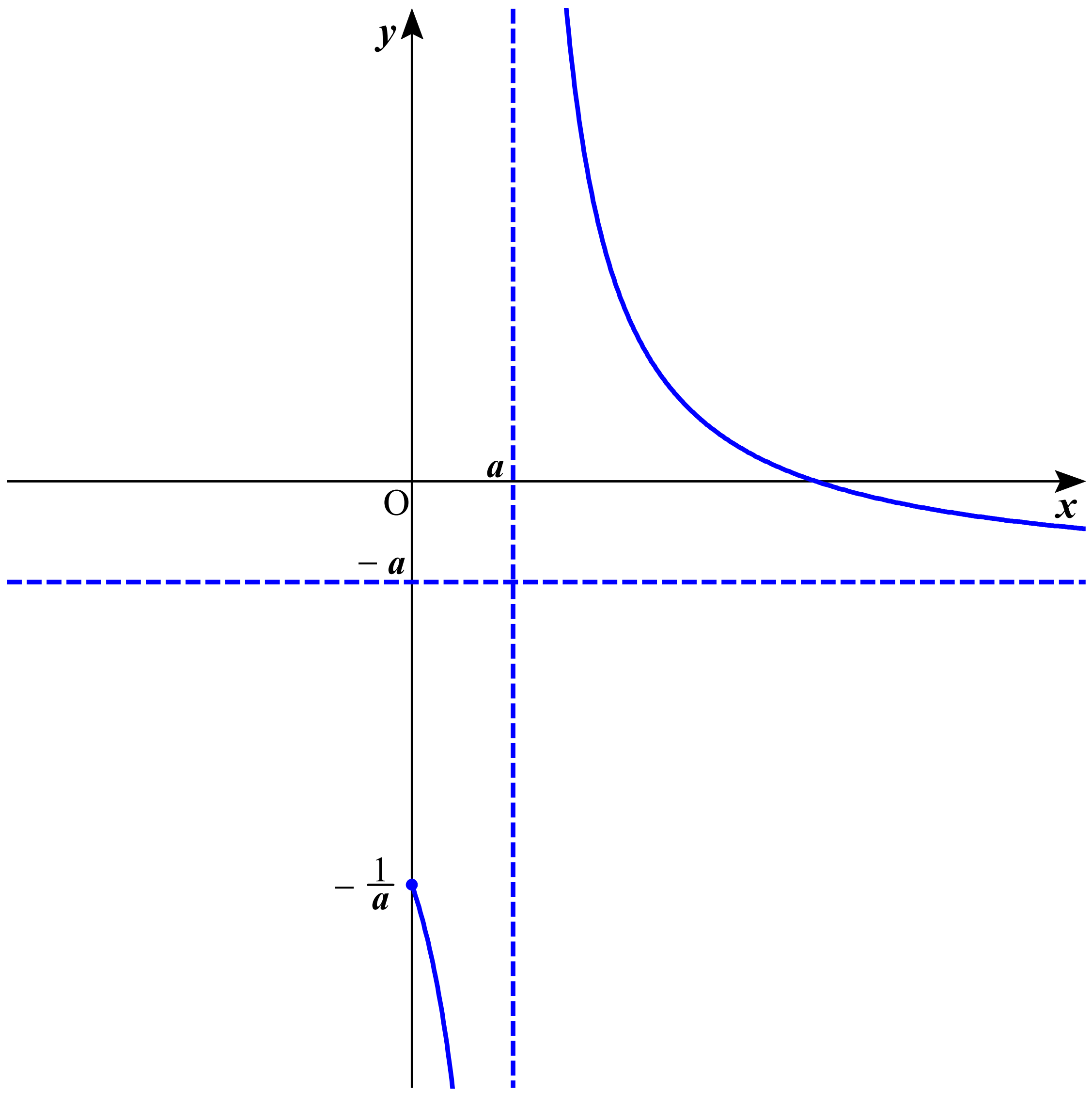
$$y=\frac{ax-1}{a-x}$$

$$=\frac{-a(a-x)+a^2-1}{a-x}$$

$$=-a+\frac{1-a^2}{x-a}$$

$0<a<1$ のとき

$1-a^2>0$ だから，下図より，$y\leq -\dfrac{1}{a}$，$-a<y$

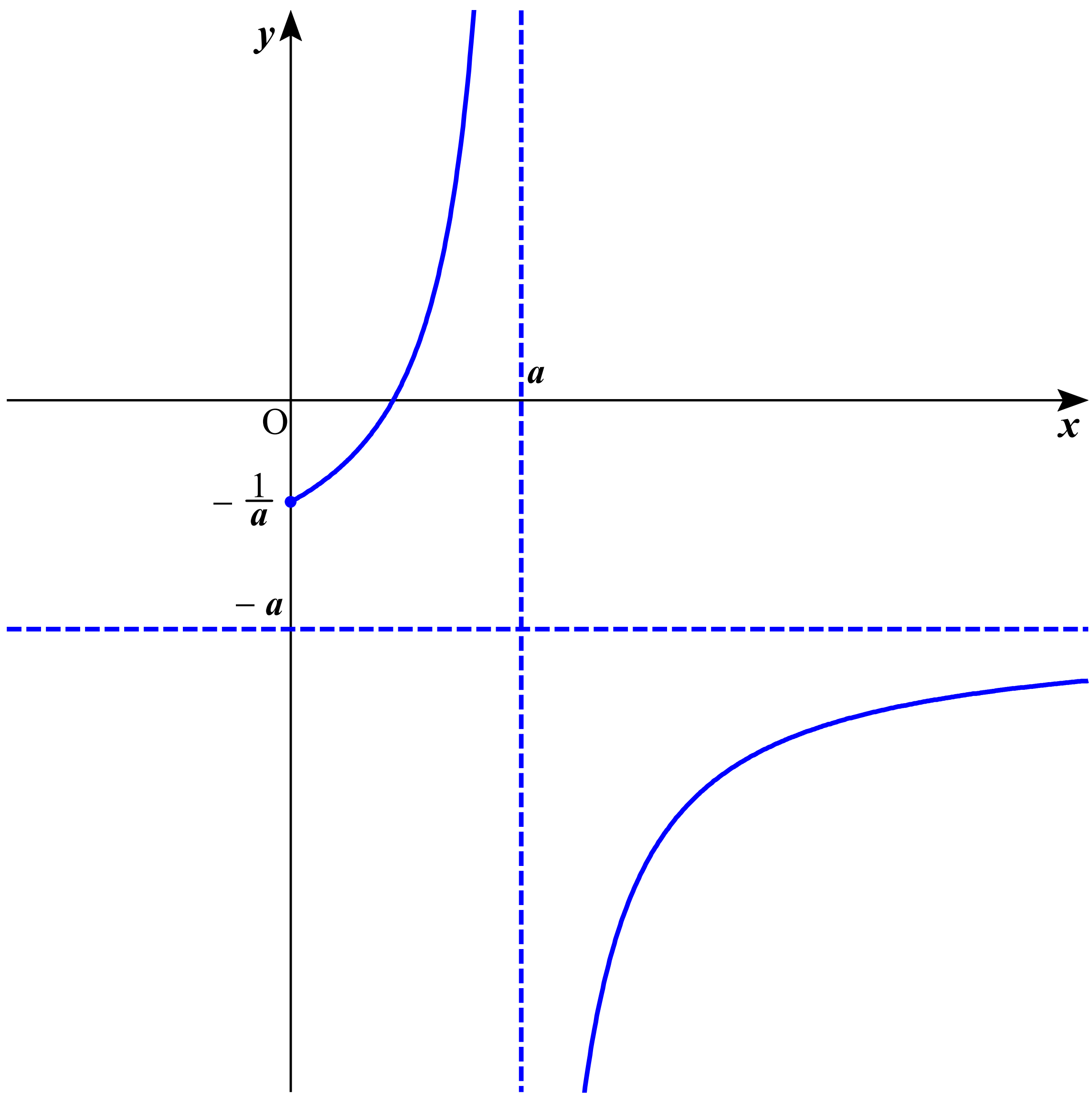


$a=1$のとき

$y=\dfrac{1\cdot x-1}{1-x}$より，　$=-1$

$a>1$のとき

$1-a^2<0$だから，下図より，　$y<-a,\ -\dfrac{1}{a}\leq y$



39

$\mathrm{P}(x, y)$ とおくと，$\mathrm{BP}=\sqrt{(x-3)^2+y^2}$，$\mathrm{AP}=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$

$\mathrm{BP}-\mathrm{AP}>2$ すなわち $\mathrm{BP}>\mathrm{AP}+2$ より，$\sqrt{(x-3)^2+y^2}>\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}+2\ (>0)$

よって，両辺を 2 乗すると，

$(x-3)^2+y^2>(x-1)^2+(y-2)^2+4\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}+4$ が成り立つ。

これを展開し，整理すると，$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}<y-x$

よって，

$(x-1)^2+(y-2)^2<(y-x)^2$ ・・・① 且つ $y-x>0$ ・・・②

①を展開し，整理すると，$2(x-2)y<2x-5$ より，

$x<2$ のとき

$$y>\frac{2x-5}{2(x-2)}=\frac{2(x-2)-1}{2(x-2)}=1-\frac{1}{2(x-2)} \quad ・・・③$$

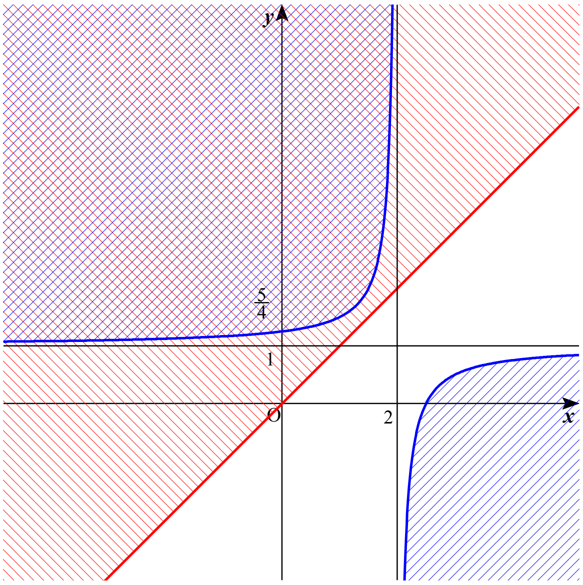
$x=2$ のとき

$2\cdot 0\cdot y<-1$ すなわち $0\cdot y<-1$ より，これを満たす y は存在しない。

$x>2$ のとき

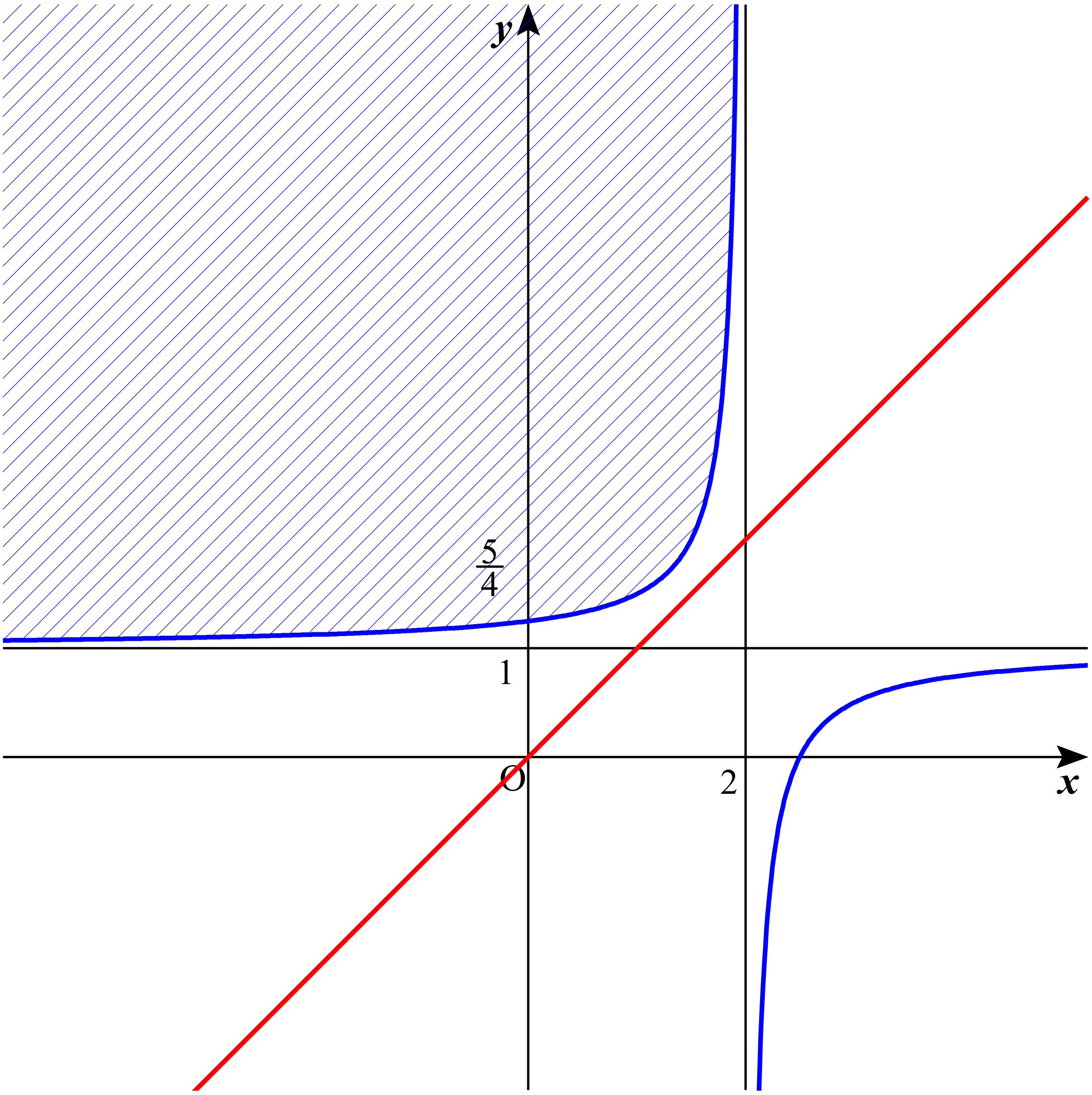
$$y<1-\frac{1}{2(x-2)} \quad ・・・④$$

よって，点 P は（②かつ③）または（②かつ④）を満たす。



境界は含まない。

ゆえに，前図より，点 P の存在範囲は次図となる。
ただし，境界は含まない。



40

ア

$y=\sqrt{2x+3}$ と $y=x-1$ の共有点の x 座標は

$\sqrt{2x+3}=x-1$ の解　すなわち $2x+3=(x-1)^2$，$x-1\geqq 0$ の解である。

$2x+3=(x-1)^2$ を展開し，整理すると，$x^2-4x-2=0$

これを解の公式を使って解くと，$x=2\pm\sqrt{6}$

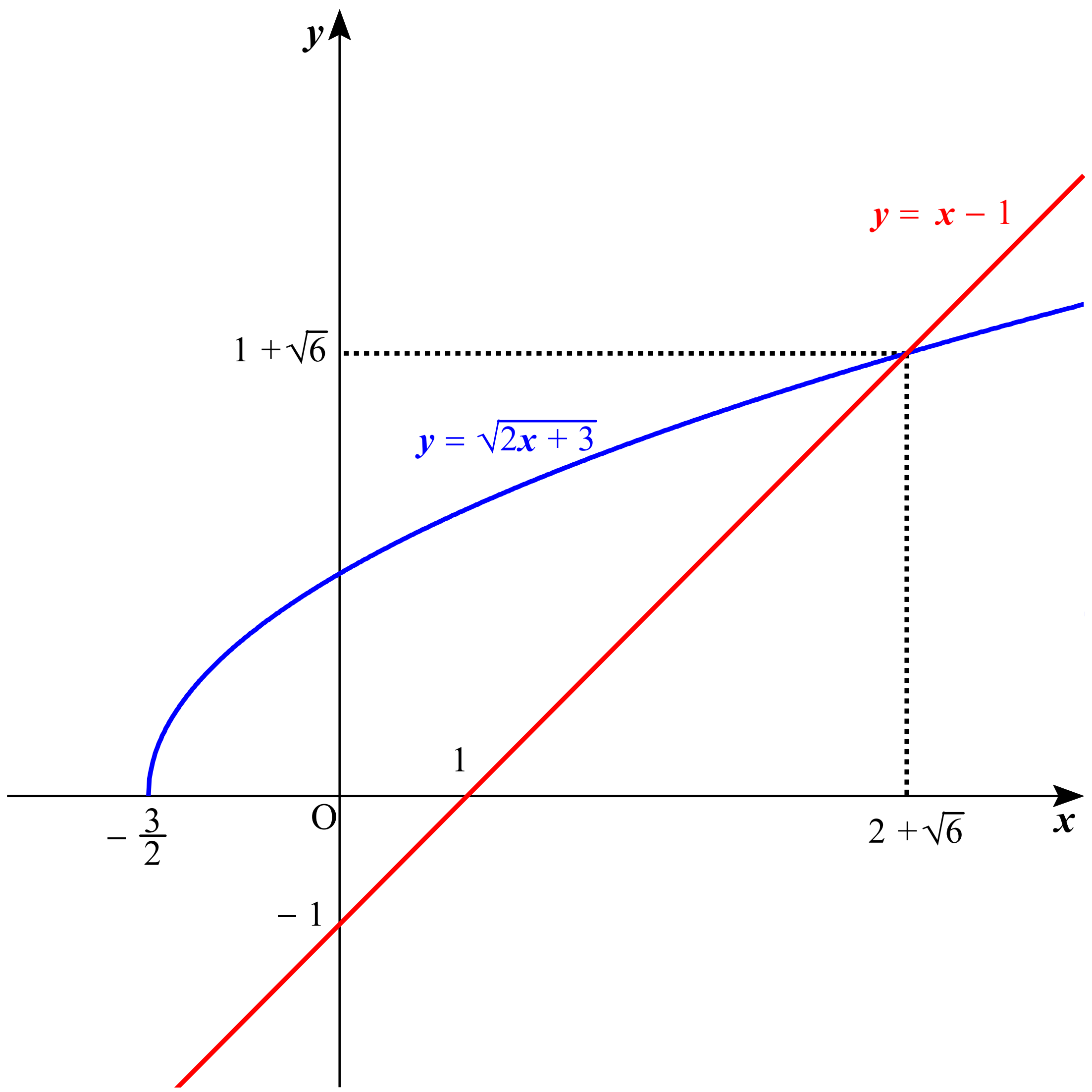
このうち，$x-1\geqq 0$ を満たすのが求める x 座標である。

ゆえに，$x=2+\sqrt{6}$

イ

解法 1　グラフを利用して解く

下図より，$-\dfrac{3}{2}\leqq x<2+\sqrt{6}$



解法 2　同値の不等式を解く

$\sqrt{2x+3} > x-1$ の解は

$\begin{cases} x-1<0 \\ 2x+3 \geq 0 \end{cases}$ の解または $\begin{cases} 2x+3 > (x-1)^2 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$ の解である。

$\begin{cases} x-1<0 \\ 2x+3 \geq 0 \end{cases}$ の解は $-\dfrac{3}{2} \leq x < 1$　・・・①

$\begin{cases} 2x+3 > (x-1)^2 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$ の解

$2x+3 > (x-1)^2$ より，$x^2-4x-2<0$　$\therefore 2-\sqrt{6} < x < 2+\sqrt{6}$　・・・②

$x-1 \geq 0$ より，$x \geq 1$　・・・③

②かつ③より，$1 \leq x < 2+\sqrt{6}$　・・・④

ゆえに，①または④より，$-\dfrac{3}{2} \leq x < 2+\sqrt{6}$

補足

無理方程式・無理不等式の同値変形

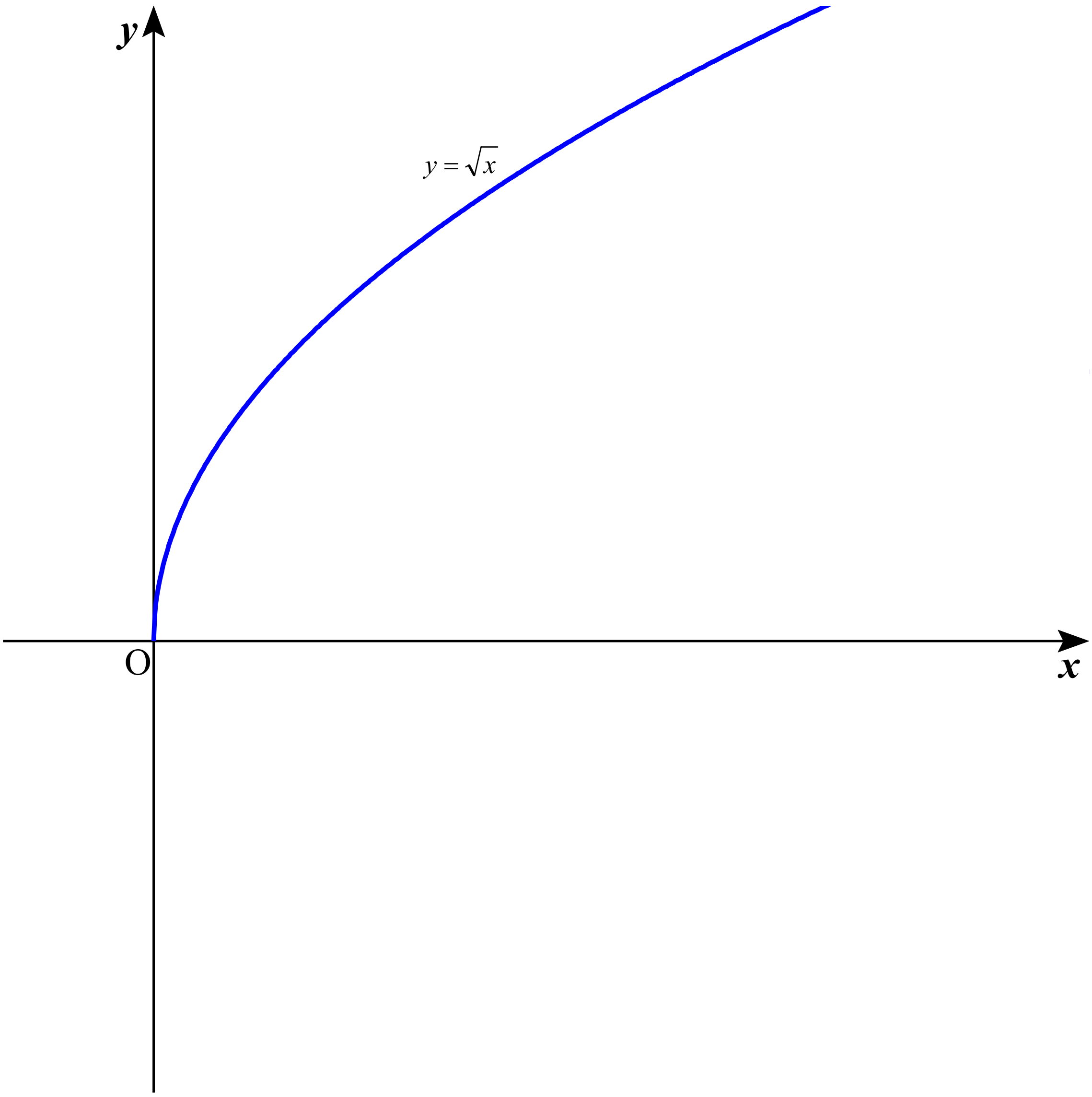
1.　$y=\sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=x \\ y \geqq 0 \end{cases}$

y を $f(x)$，x を $g(x)$ に置き換えると，

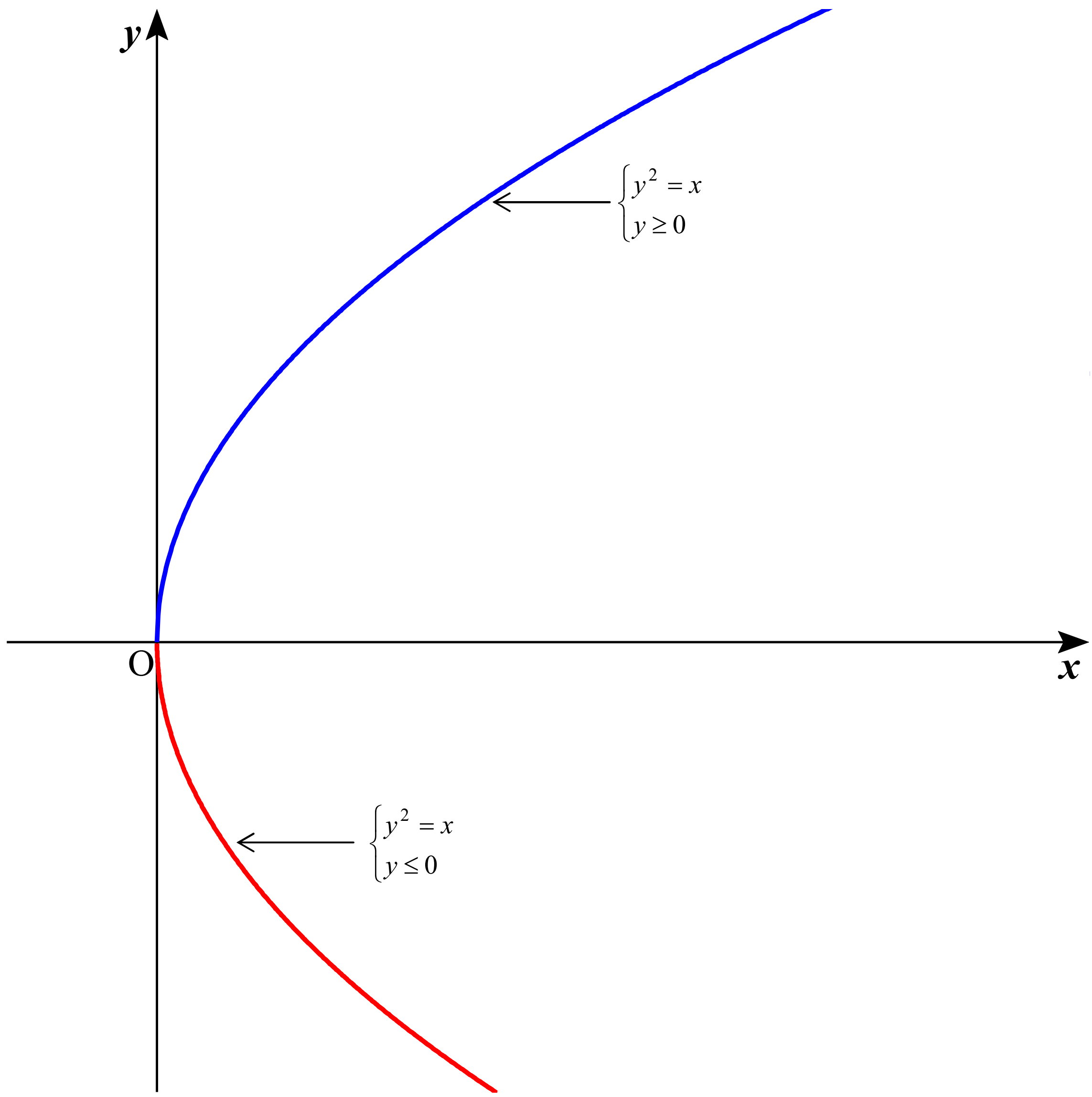
$f(x)=\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} \{f(x)\}^2=g(x) \\ g(x) \geqq 0 \end{cases}$

解説図

$y=\sqrt{x}$ のグラフ



$y^2 = x$ のグラフ


y
O
x
$\begin{cases} y^2 = x \\ y \geq 0 \end{cases}$
$\begin{cases} y^2 = x \\ y \leq 0 \end{cases}$

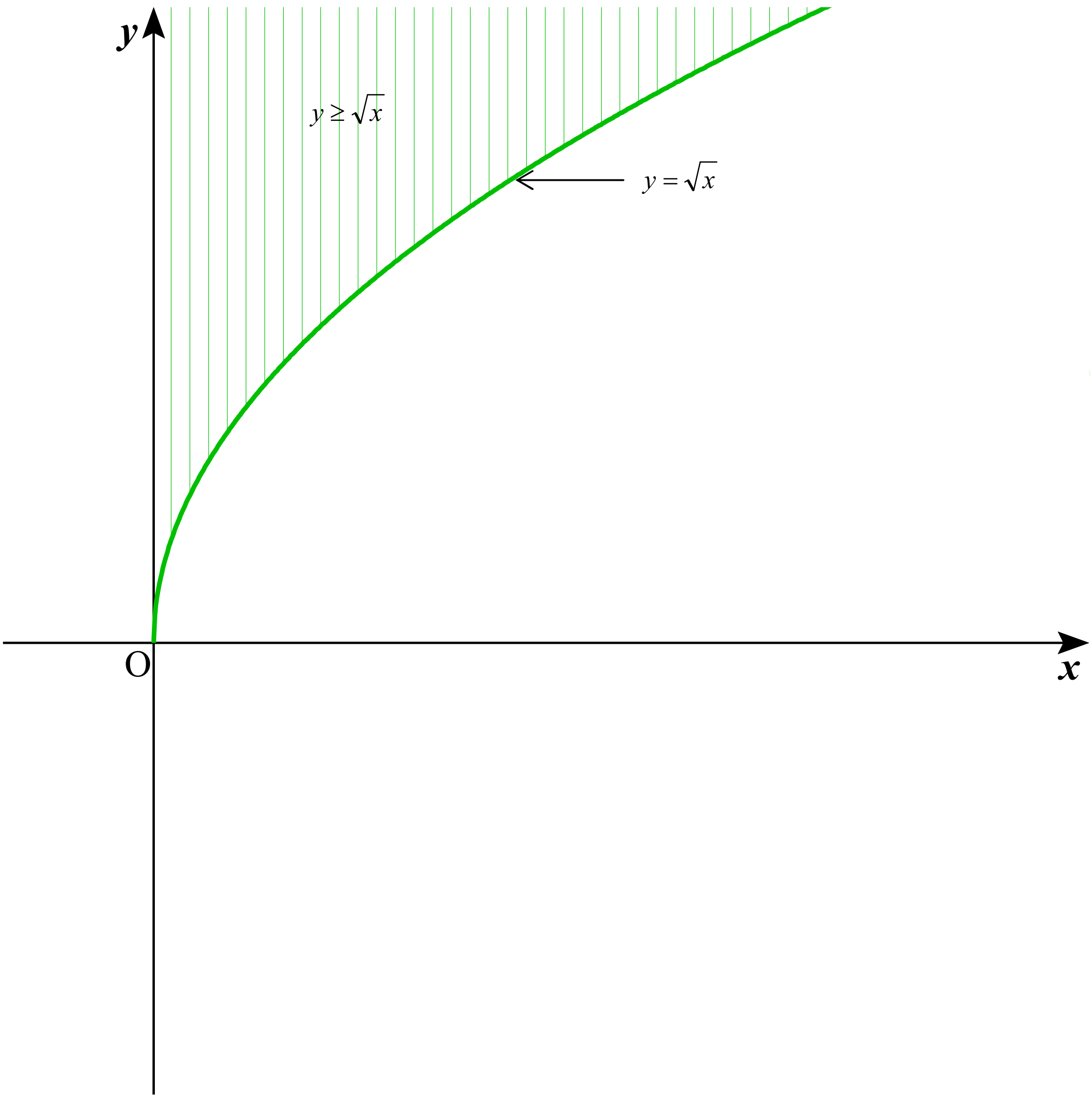
2.　$y \geq \sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 \geq x \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$

y を $f(x)$，x を $g(x)$ に置き換えると，

$$f(x) \geq \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} \{f(x)\}^2 \geq g(x) \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

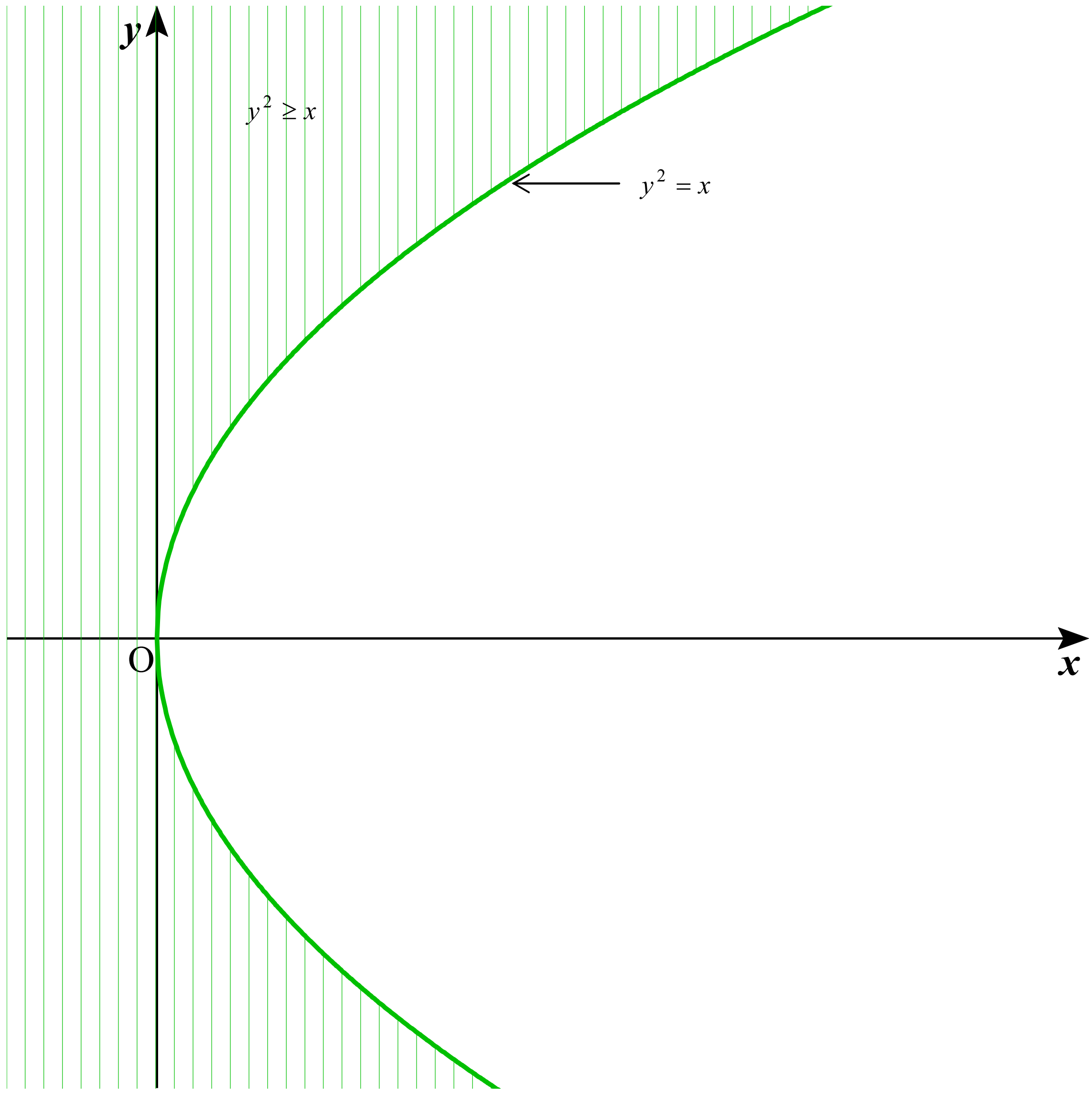
解説図

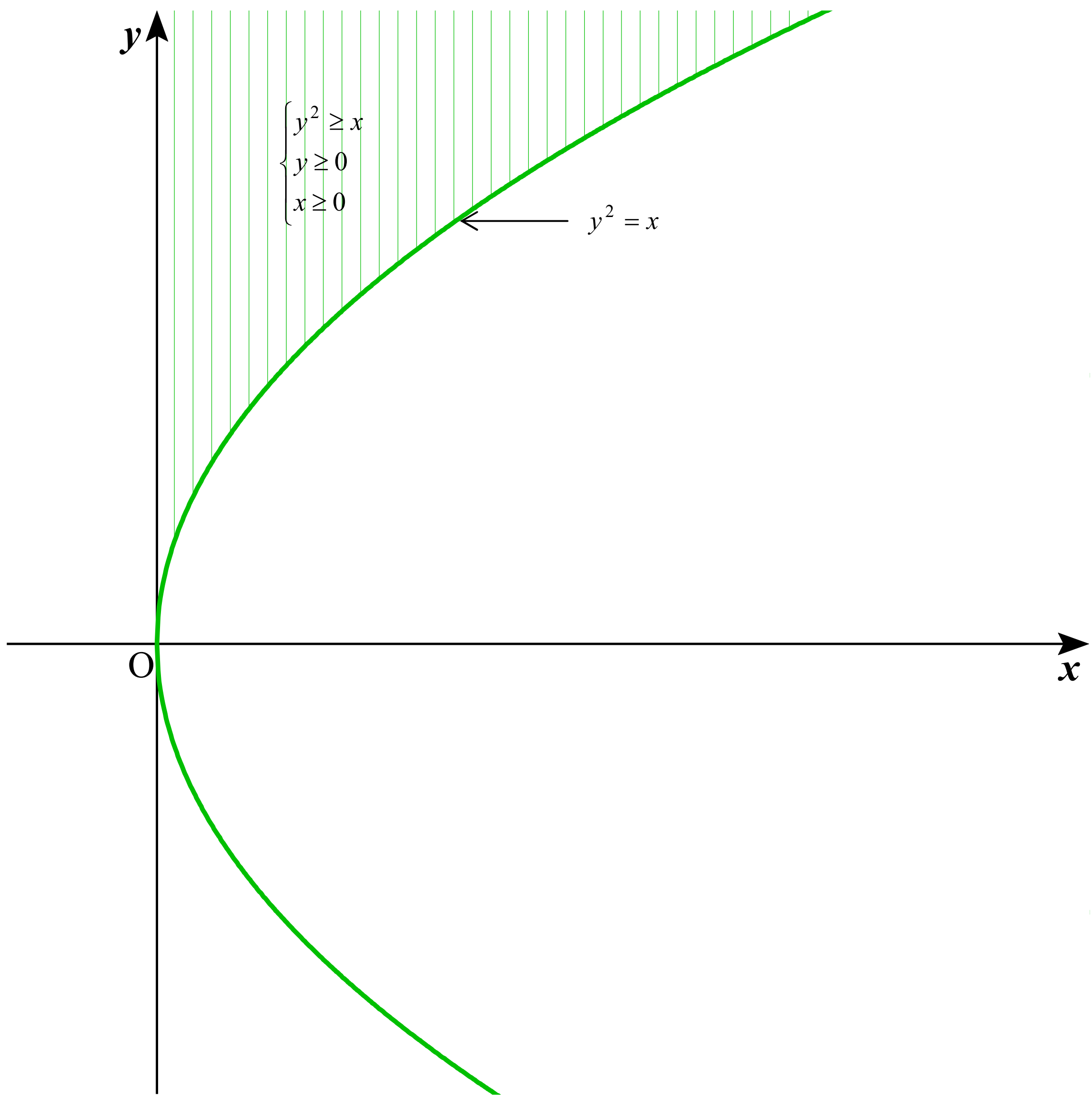
$y \geq \sqrt{x}$ を満たす領域を下に示す。



$y^2 \geq x$ を満たす領域を下に示す。
この領域のうち，$y \geq \sqrt{x}$ を満たす部分は，$y^2 \geq x$ かつ $y \geq 0$ かつ $x \geq 0$ の部分であるから，

$$y \geq \sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 \geq x \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$





y
x
O
$\begin{cases} y^2 \geq x \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$
$y^2 = x$

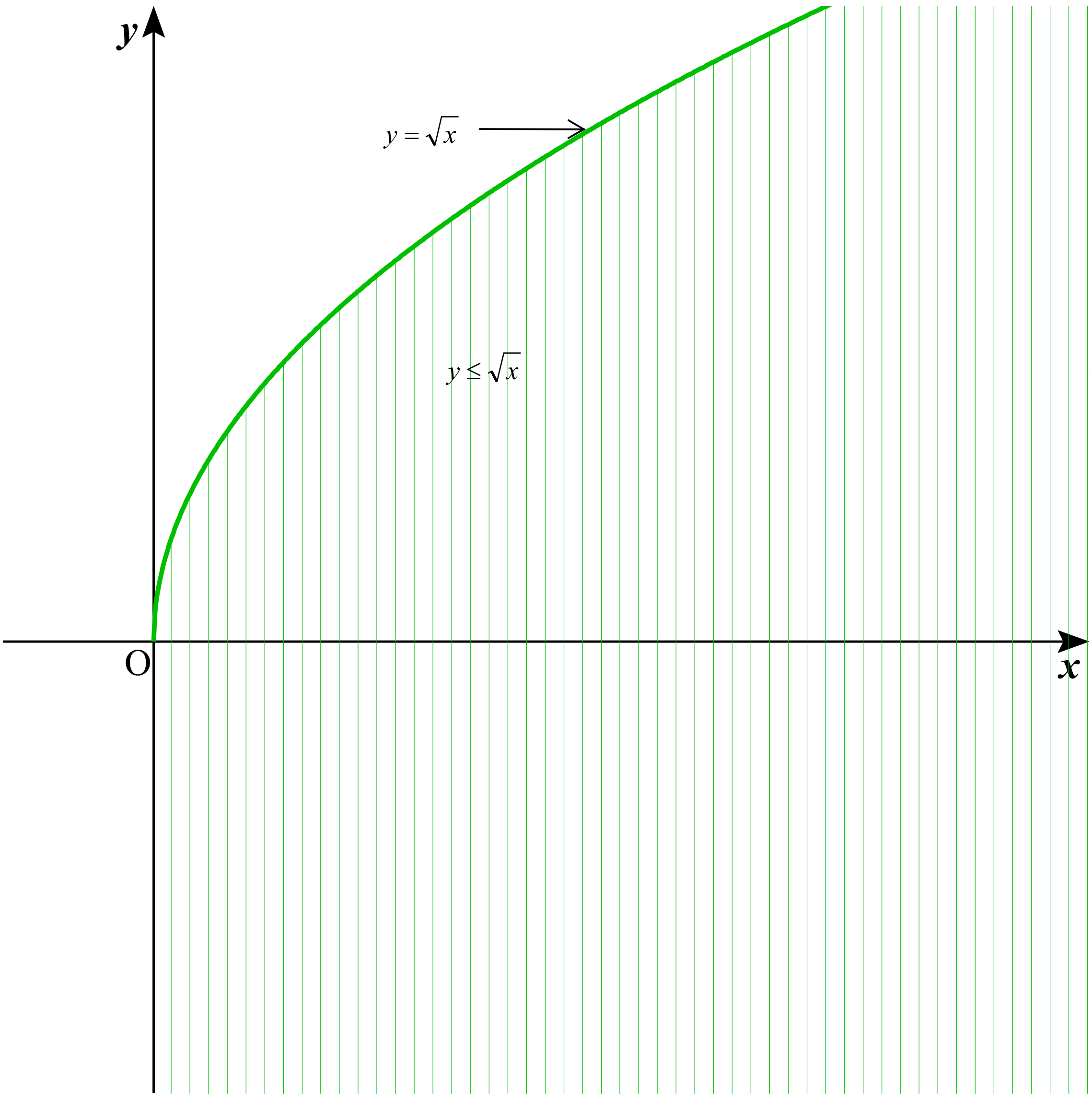
3. $y \leq \sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$ または $\begin{cases} y^2 \leq x \\ y \geq 0 \end{cases}$

y を $f(x)$，x を $g(x)$ に置き換えることにより，

$f(x) \leq \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$ または $\begin{cases} \{f(x)\}^2 \leq g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$

解説図

$y \leq \sqrt{x}$ を満たす領域を下に示す。

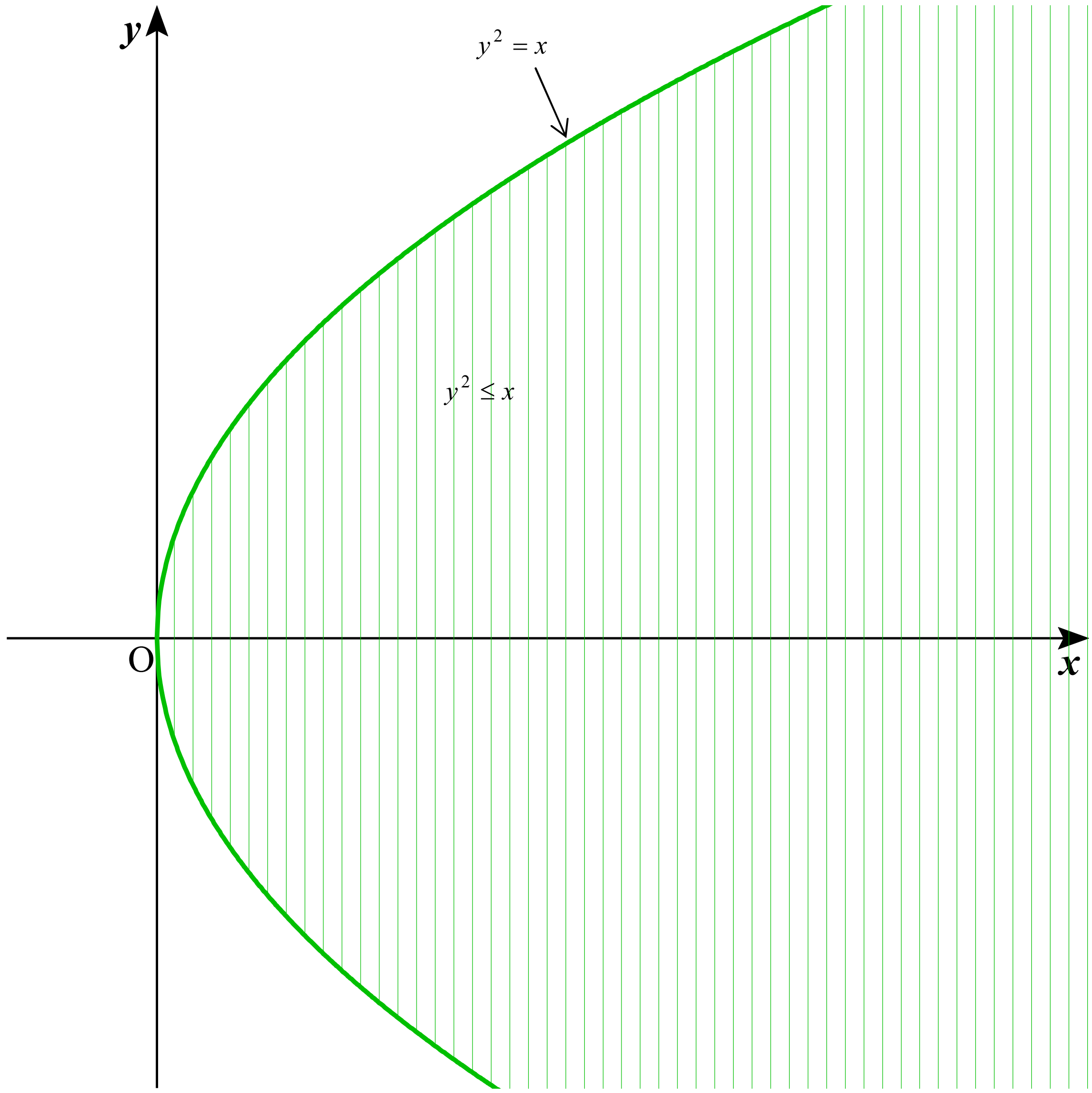


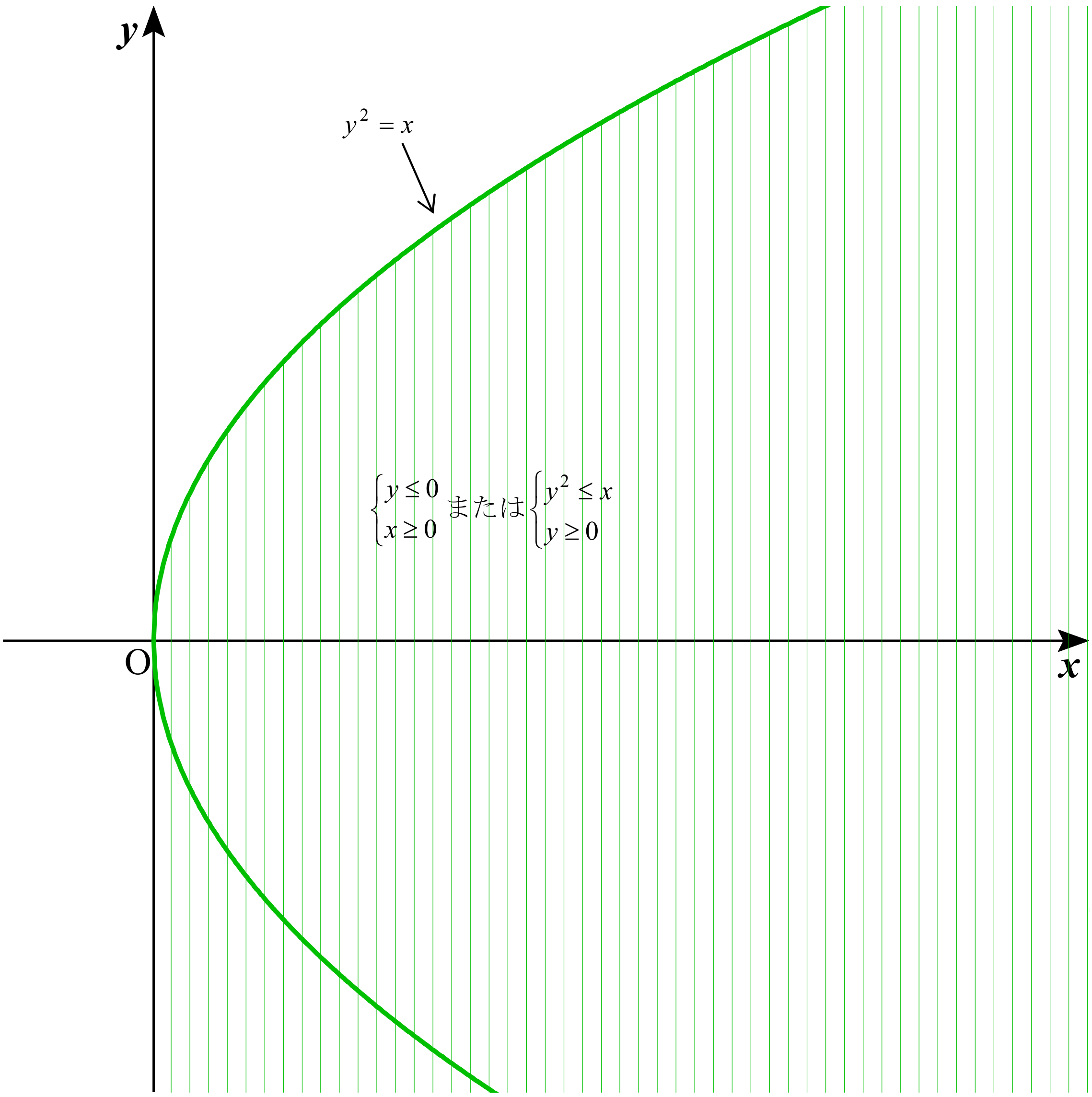
$y^2 \leq x$ を満たす領域を下に示す。

したがって，$y \leq \sqrt{x}$ を満たす領域は，

$y^2 \leq x$ かつ $y \geq 0$ を満たす領域と $y \leq 0$ かつ $x \geq 0$ を満たす領域の和で表すことができる。

よって，$y \leq \sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$ または $\begin{cases} y^2 \leq x \\ y \geq 0 \end{cases}$




y
$y^2 = x$
$\begin{cases} y \le 0 \\ x \ge 0 \end{cases}$ または $\begin{cases} y^2 \le x \\ y \ge 0 \end{cases}$
O
x

41

(1)

解法 **1**　同値の不等式を解く

$\sqrt{4x-x^2}>3-x \Leftrightarrow \begin{cases}3-x<0\\4x-x^2\geq 0\end{cases}$ または $\begin{cases}3-x\geq 0\\4x-x^2>(3-x)^2\end{cases}$

$\begin{cases}3-x<0\\4x-x^2\geq 0\end{cases}$

$3-x<0$ より，$x>3$　・・・①

$4x-x^2=x(4-x)\geq 0$ より，$x(x-4)\leq 0$　$\therefore 0\leq x\leq 4$　・・・②

①かつ②より，$3<x\leq 4$　・・・③

$\begin{cases}3-x\geq 0\\4x-x^2>(3-x)^2\end{cases}$

$3-x\geq 0$ より，$x\leq 3$　・・・④

$4x-x^2>(3-x)^2$ より，$2x^2-10x+9<0$　$\therefore \dfrac{5-\sqrt{7}}{2}<x<\dfrac{5+\sqrt{7}}{2}$　・・・⑤

④かつ⑤より，$\dfrac{5-\sqrt{7}}{2}<x\leq 3$　・・・⑥

ゆえに，③または⑥より，$\dfrac{5-\sqrt{7}}{2}<x\leq 4$

解法 **2**　グラフを利用して解く

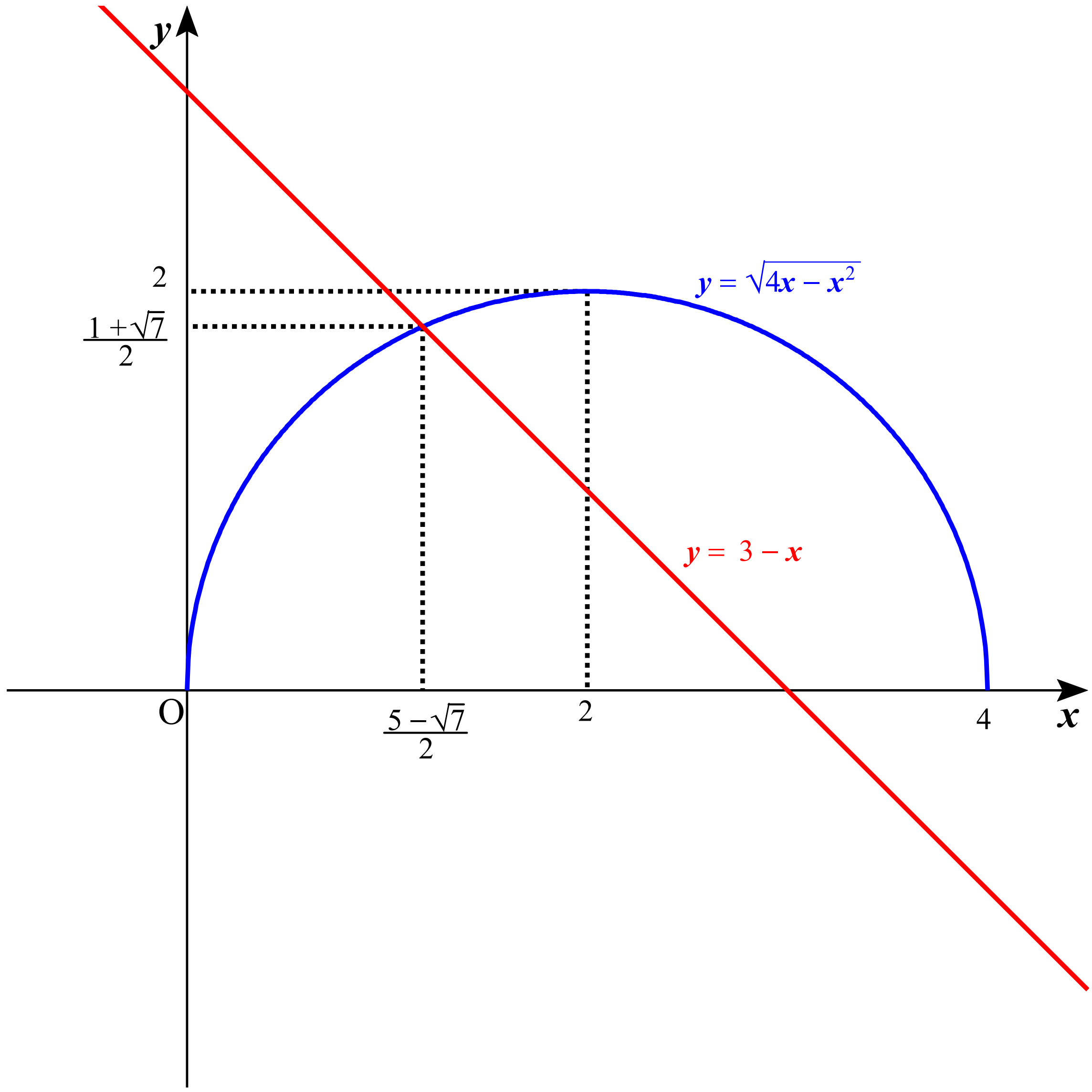
$y=\sqrt{4x-x^2}$ とおくと，$y=\sqrt{4x-x^2} \Leftrightarrow y^2=4x-x^2, y\geq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2=4,\ y\geq 0$ より，

$y=\sqrt{4x-x^2}$ は $(2,\ 0)$ を中心とする半径 2 の円の $y\geq 0$ の部分を表す。

これと $y=3-x$ の交点の座標は $\begin{cases}(x-2)^2+y^2\\y\geq 0\\y=3-x\end{cases}$ を解くことにより，$\left(\dfrac{5-\sqrt{7}}{2},\ \dfrac{1+\sqrt{7}}{2}\right)$

よって，$y=\sqrt{4x-x^2}\ (y\geq 0)$ と $y=3-x$ のグラフは次のようになる。

ゆえに，$\sqrt{4x-x^2}>3-x$ を満たす x の範囲は $\dfrac{5-\sqrt{7}}{2}<x\leq 4$



y
2
$\frac{1+\sqrt{7}}{2}$
$y=\sqrt{4x-x^2}$
$y=3-x$
O
$\frac{5-\sqrt{7}}{2}$
2
4
x

(2)

解法 **1**　同値の不等式を解く

$\sqrt{a^2-x^2} > 3x-a\ (a \neq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-a<0 \\ a^2-x^2 \geq 0 \end{cases} (a \neq 0)$　または　$\begin{cases} 3x-a \geq 0 \\ a^2-x^2 > (3x-a)^2 \end{cases} (a \neq 0)$

$\begin{cases} 3x-a<0 \\ a^2-x^2 \geq 0 \end{cases} (a \neq 0)$

$3x-a<0$ より，$x<\dfrac{a}{3}$　・・・①

$a^2-x^2 \geq 0$ すなわち $x^2-a^2 \leq 0$ より，$(x+a)(x-a) \leq 0$

よって，

$a>0$ のとき　$-a \leq x \leq a$　・・・②

$a<0$ のとき　$a \leq x \leq -a$　・・・③

ゆえに，

$a>0$ のとき，①かつ②より，$-a \leq x < \dfrac{a}{3}$　・・・④

$a<0$ のとき，①かつ③より，$a \leq x < \dfrac{a}{3}$　・・・⑤

$\begin{cases} 3x-a \geq 0 \\ a^2-x^2 > (3x-a)^2 \end{cases} (a \neq 0)$

$3x-a \geq 0$ より，$x \geq \dfrac{a}{3}$　・・・⑥

$a^2-x^2 > (3x-a)^2$ を整理すると，$2x(5x-3a)<0$

よって，

$a>0$ のとき　$0<x<\dfrac{3}{5}a$　・・・⑦

$a<0$ のとき　$\dfrac{3}{5}a<x<0$　・・・⑧

ゆえに，

$a>0$ のとき，⑥かつ⑦より，$\dfrac{a}{3} \leq x < \dfrac{3}{5}a$　・・・⑨

$a<0$ のとき，⑥かつ⑧より，$\dfrac{a}{3} \leq x < 0$　・・・⑩

以上より，

$a>0$ のとき，④または⑨より，$-a \leq x < \dfrac{3}{5}a$

$a<0$ のとき，⑤または⑩より，$a \leq x < 0$

解法 **2**　グラフを利用して解く

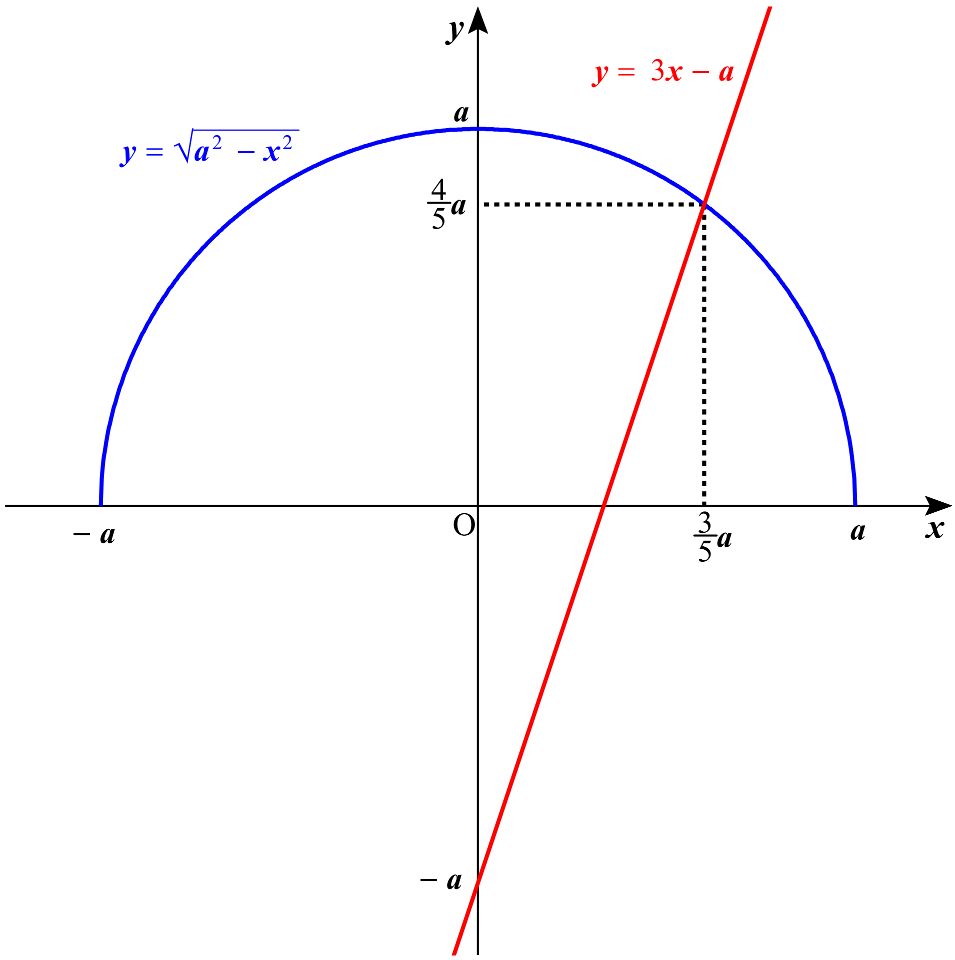
$a>0$ のとき

$y=\sqrt{a^2-x^2}$ と $y=3x-a$ のグラフの交点の x 座標

$\begin{cases} a^2-x^2=(3x-a)^2 \\ 3x-a\geq 0 \end{cases}$ の解より，$x=\dfrac{3}{5}a$

よって，$y=\sqrt{a^2-x^2}$ と $y=3x-a$ のグラフの交点は $\left(\dfrac{3}{5}a,\ \dfrac{4}{5}a\right)$

したがって，$y=\sqrt{a^2-x^2}$ と $y=3x-a$ のグラフは下図のようになる。



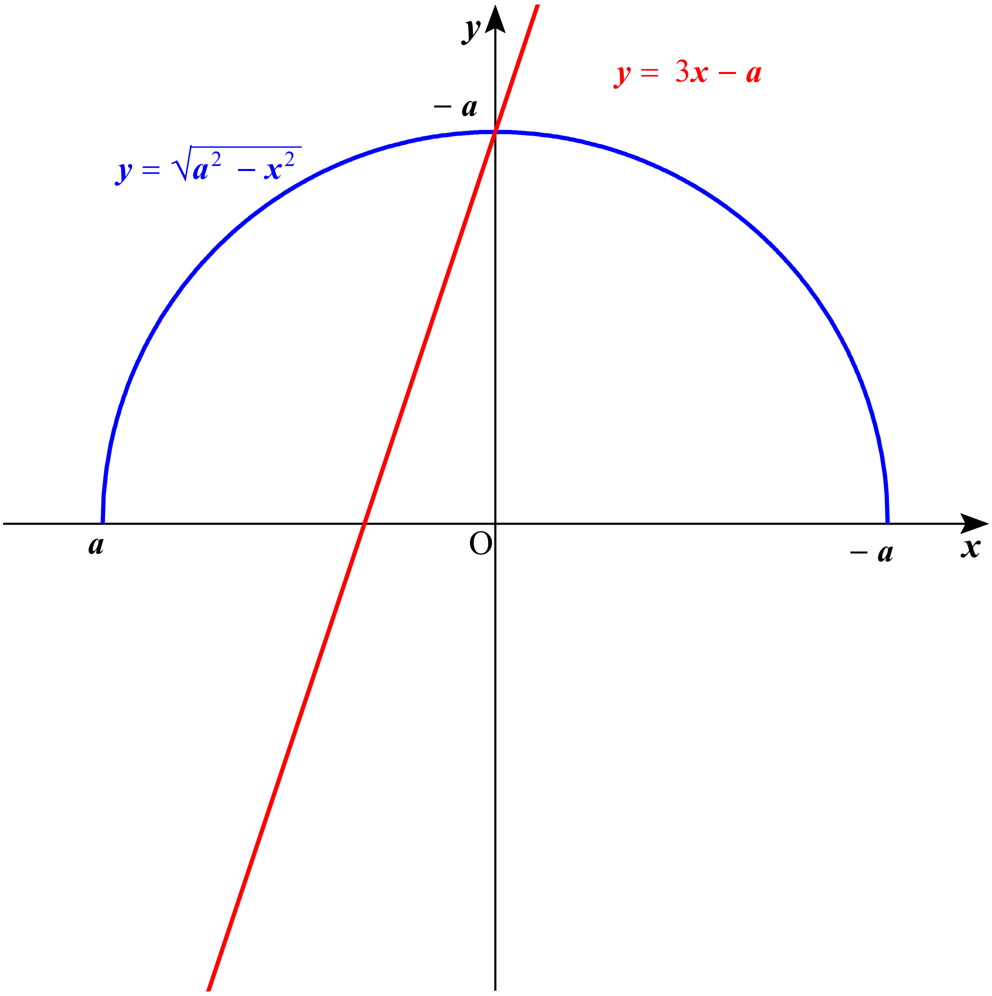
$a<0$ のとき

$y=\sqrt{a^2-x^2}$ と $y=3x-a$ のグラフの交点の x 座標

$\begin{cases} a^2-x^2=(3x-a)^2 \\ 3x-a \geq 0 \end{cases}$ の解より，　$x=0$

よって，　$y=\sqrt{a^2-x^2}$ と $y=3x-a$ のグラフの交点は $(0,\ -a)$

したがって，　$y=\sqrt{a^2-x^2}$ と $y=3x-a$ のグラフは下図のようになる。



よって，　$\sqrt{a^2-x^2}>3x-a\ (a\neq 0)$ の解は，グラフより，

$a>0$ のとき　$-a\leq x<\dfrac{3}{5}a$

$a<0$ のとき　$a\leq x<0$

42

$y=\sqrt{a-4x}+b$ は定義域において単調に減少するから，
$x=-4$ で最大値，$x=0$ で最小値をとる。

よって，$\begin{cases}\sqrt{a+16}+b=5\\ \sqrt{a}+b=3\end{cases}$ $(a>0)$ を解くことにより，$a=9,\ b=0$

例題 6

グラフを利用しないで解く

$$\sqrt{x-1}-1=k(x-k)\ (k<0) \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=kx-k^2+1\ (k<0) \Leftrightarrow \begin{cases}x-1=(kx-k^2+1)^2\\ kx-k^2+1\geq 0\end{cases}\ (k<0)$$

ここで，$kx-k^2+1=t$ とおくと，$x=\dfrac{t+k^2-1}{k}$ より，

$\begin{cases}x-1=(kx-k^2+1)^2\\ kx-k^2+1\geq 0\end{cases}$ $(k<0)$ は $\begin{cases}\dfrac{t+k^2-k-1}{k}=t^2\\ t\geq 0\end{cases}$ $(k<0)$ となるから，

$\begin{cases}\dfrac{t+k^2-k-1}{k}=t^2\\ t\geq 0\end{cases}$ $(k<0)$ が解をもたないような負の数 k の範囲を求めればよい。

$\dfrac{t+k^2-k-1}{k}=t^2\ (t\geq 0)$ を整理すると，$kt^2-t-(k^2-k-1)=0\ (t\geq 0)$

よって，$kt^2-t-(k^2-k-1)=0\ (t\geq 0)$ が解をもたない条件は，
判別式を D，実数解を $\alpha,\ \beta$ とすると，

$$\begin{aligned}D<0\cup\{D\geq 0\cap(\alpha+\beta<0\cap\alpha\beta>0)\}&=(D<0\cup D\geq 0)\cap\{D<0\cup(\alpha+\beta<0\cap\alpha\beta>0)\}\\&=D<0\cup(\alpha+\beta<0\cap\alpha\beta>0)\end{aligned}$$

$\alpha+\beta<0\cap\alpha\beta>0$ が成り立つときの k の値の範囲

$k<0$ および $\alpha+\beta=\dfrac{1}{k}$ より，$\alpha+\beta<0$ は成り立つ。

したがって，$\alpha\beta<0$ が成り立つときの k の値の範囲を求めればよい。

$\alpha\beta=-\dfrac{k^2-k-1}{k}$ より，$-\dfrac{k^2-k-1}{k}>0$

すなわち $k(k^2-k-1)=k\left(k-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(k+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)<0$

これと $k<0$ より，$k<\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

$D<0$ が成り立つときと $k=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

$D=1=4k\left(k^2-k-1\right)+1=4k^3-4k^2-4k+1$

$D'=12k^2-8k-4=4\left(3k^2-2k-1\right)=4(k-1)(3k+1)$

より，D の増減は次のようになる。

k	$\cdots$	$-\dfrac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
D'	$+$	0	$-$	0	$+$
D	$\uparrow$	$D\left(-\dfrac{1}{3}\right)$	$\downarrow$	-3	$\uparrow$

ここで，$-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}=\dfrac{-5+3\sqrt{5}}{6}>0$ より，$\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<-\dfrac{1}{3}$

$k=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ のとき $k^2-k-1=0$ だから，

$$D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=4k^3-4k^2-4k+1=4k\left(k^2-k-1\right)+1=1>0$$

よって，$D=0$ を満たす k は $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ より小さい

以上より，

$D<0\cup(\alpha+\beta<0\cap\alpha\beta>0)$ を満たす負の数 k の範囲

すなわち $\sqrt{x-1}-1=k(x-k)$ が解をもたないような負の数 k の範囲は $k<\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

B

43

(1)

$y=x+|x-a|$ に $x=a$ を代入すると，$y=a$ だから，$\mathrm{P}(a,\ a)$

よって，点 P の軌跡は $y=x$

(2)

解法 1　グラフを利用して解く

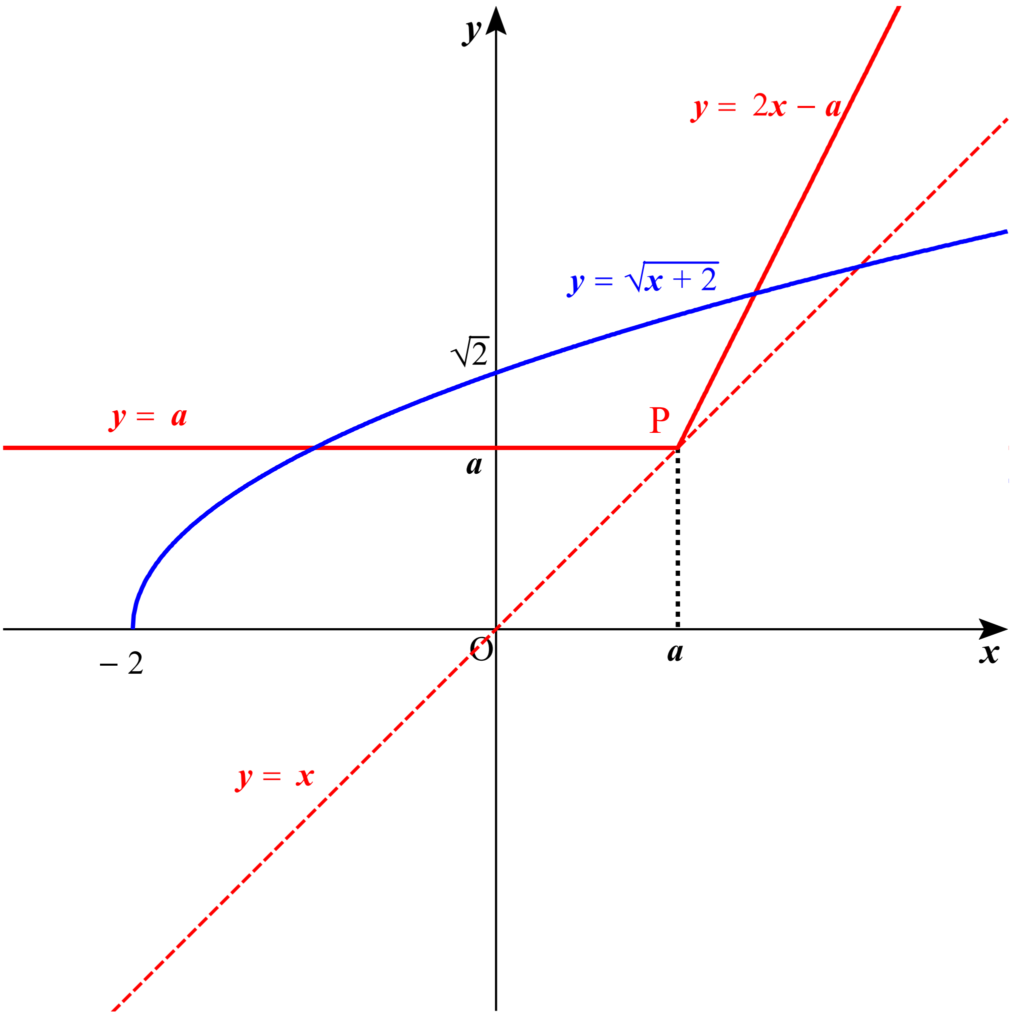
$\sqrt{x+2}=x+|x-a|$ が相異なる 2 つの実数解をもつ条件は

$y=\sqrt{x+2}$ のグラフと $y=x+|x-a|$ のグラフが異なる 2 つの共有点をもつことである。

$y=x+|x-a|$ のグラフは $x<a$ のとき $y=a$，$a\leq x$ のとき $y=2x-a$ で，

$x=a$ となる点は(1)より，$y=x$ 上にある。

したがって，$y=\sqrt{x+2}$ のグラフと $y=x+|x-a|$ のグラフは下図のようになる。



よって，

$y=2x-a\ (x\geq a)$ と $y=\sqrt{x+2}$ が異なる 2 つの共有点をもつ場合と $y=a\ (x<a)$，$y=2x-a$ $(x\geq a)$ のそれぞれが $y=\sqrt{x+2}$ と 1 つの共有点をもつ場合が考えられる。

$y=2x-a\ (x\geq a)$ と $y=\sqrt{x+2}$ が異なる 2 つの共有点をもつ場合

$y=2x-a\ (x\geq a)$ と $y=\sqrt{x+2}$ が接するとき

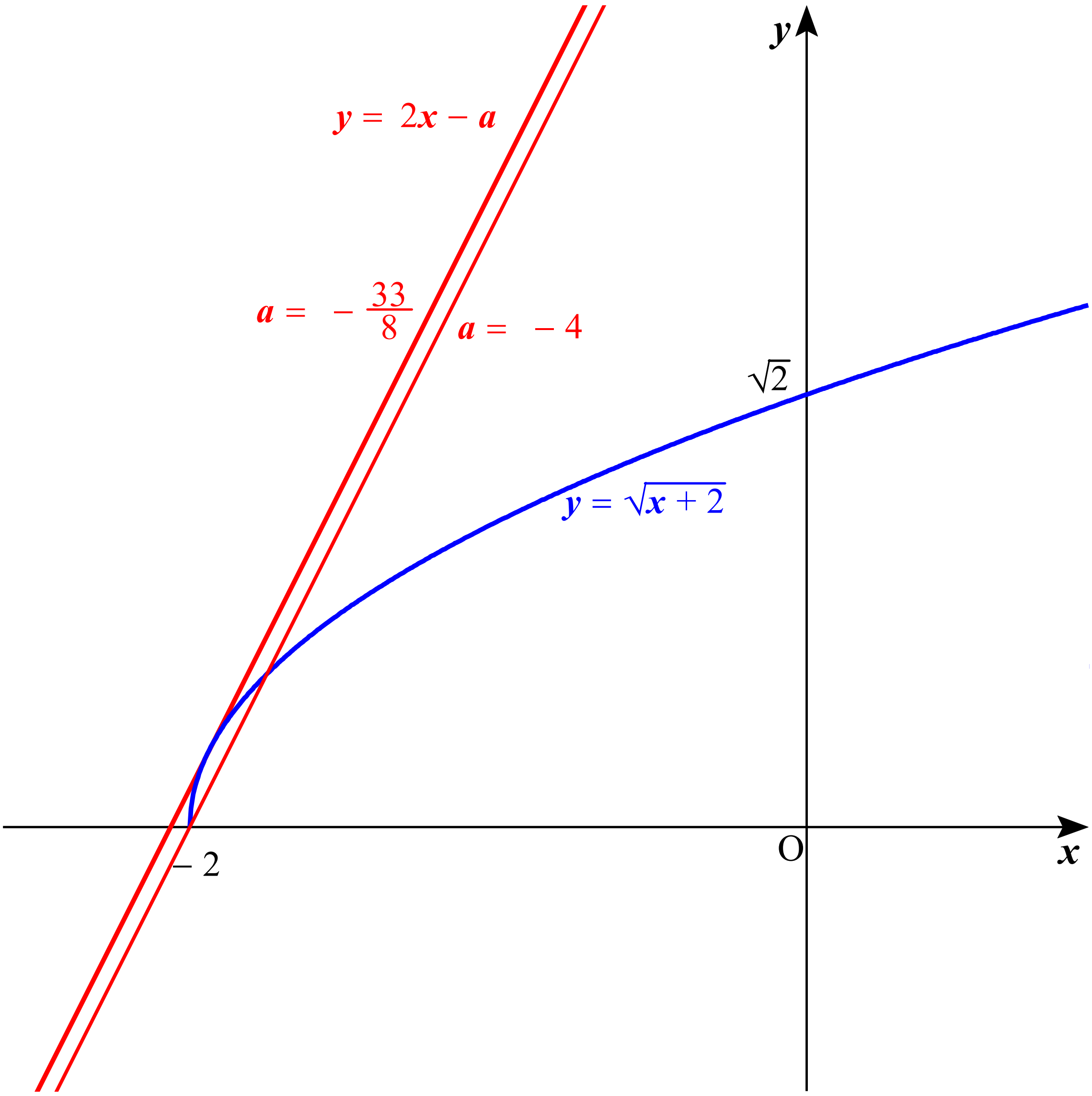
$(2x-a)^2=x+2$ すなわち $4x^2-(4a+1)x+a^2-2=0$ が重解をもつときだから，

判別式を D とすると，$D=0$ より，$8a+33=0$　$\therefore a=-\dfrac{33}{8}$

$y=2x-a\ (x\geq a)$ が $(-2,\ 0)$ を通るとき

$0=-4-a$ より，$a=-4$

よって，$-\dfrac{33}{8}<a\leq -4$　・・・①



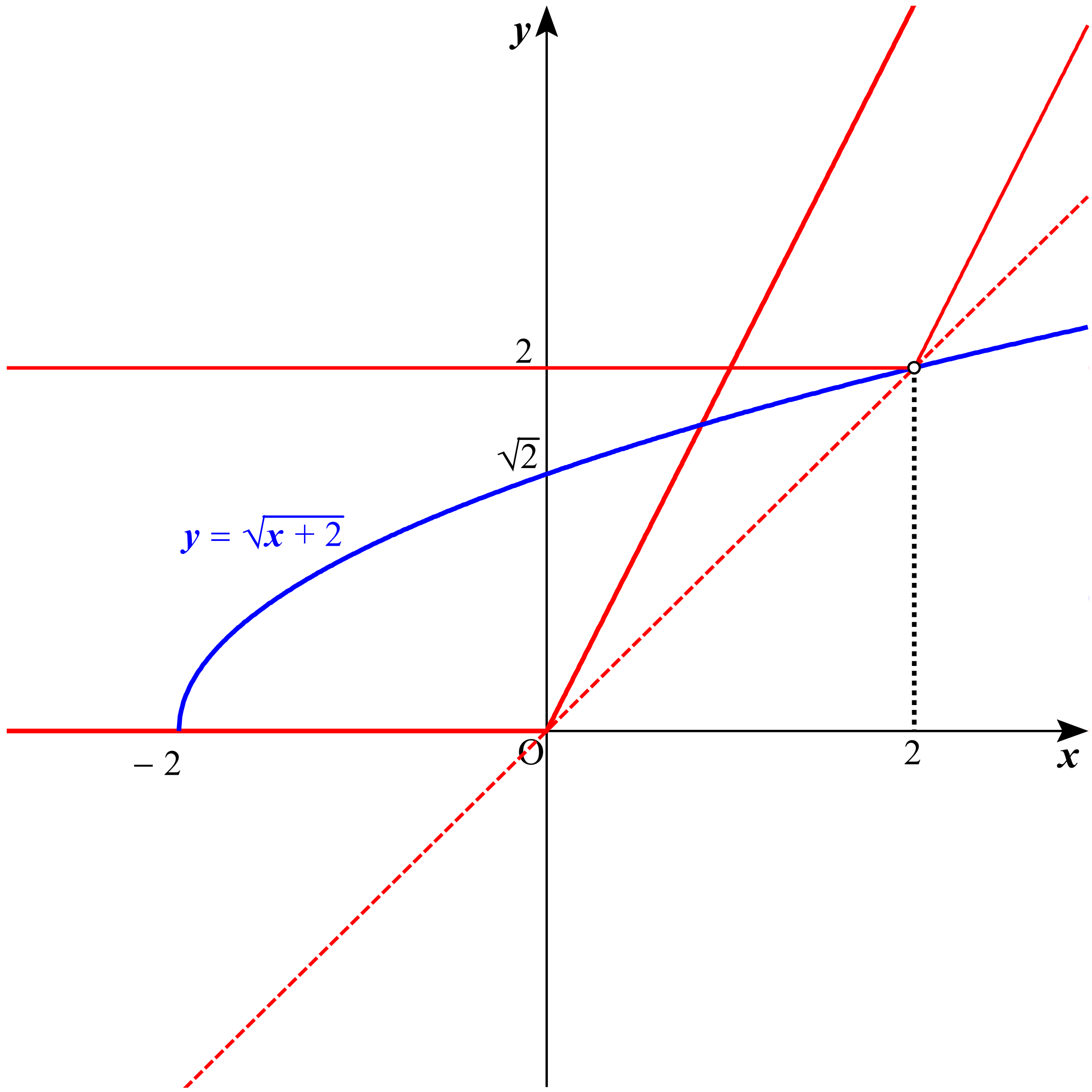
$y=a\ (x<a)$，　$y=2x-a\quad(x\geq a)$のそれぞれが$y=\sqrt{x+2}$と 1 つの共有点をもつ場合

$y=x$と$y=\sqrt{x+2}$の交点のx座標は，

$x^2=x+2\ (x\geq 0)$すなわち$(x+1)(x-2)=0\ (x\geq 0)$より，　$x=2$

よって，このときの P の座標は$(2,\ 2)$

ゆえに，下図より，条件を満たすaの範囲は$0\leq a<2$　・・・②



①または②より，$-\dfrac{33}{8}<a\leq -4$または$0\leq a<2$

解法 2　グラフを利用しないで解く

$$\sqrt{x+2}=x+|x-a| \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=\left(x+|x-a|\right)^2 \\ x+|x-a| \geq 0 \end{cases}$$

絶対値をはずさないことには代数的処理は不可能だから，

$\begin{cases} x+2=\left(x+|x-a|\right)^2 \\ x+|x-a| \geq 0 \end{cases}$ を $x \geq a$ と $x<a$ で場合分けし，それぞれの式を整理すると，

$\begin{cases} 4x^2-(4a+1)x+a^2-2=0 \\ x \geq \dfrac{a}{2} \\ x \geq a \end{cases}$ または $\begin{cases} x=a^2-2 \\ a \geq 0 \\ x<a \end{cases}$ ・・・① となる。

$\begin{cases} 4x^2-(4a+1)x+a^2-2=0 \\ x \geq \dfrac{a}{2} \\ x \geq a \end{cases}$ については，$a \geq 0$ ならば $a \geq \dfrac{a}{2}$，$a<0$ ならば $\dfrac{a}{2}>a$ だから，

$\begin{cases} 4x^2-(4a+1)x+a^2-2=0 \\ x \geq a \\ a \geq 0 \end{cases}$ ・・・② または $\begin{cases} 4x^2-(4a+1)x+a^2-2=0 \\ x \geq \dfrac{a}{2} \\ a<0 \end{cases}$ ・・・③

$a \geq 0$ のとき

①，②より，

$\begin{cases} x=a^2-2 \\ x<a \end{cases}$ と $\begin{cases} 4x^2-(4a+1)x+a^2-2=0 \\ x \geq a \end{cases}$ が合わせて相異なる 2 実数解をもてばよい。

$\begin{cases} x=a^2-2 \\ x<a \end{cases}$ の場合

$a^2-2<a$ より，$(a+1)(a-2)<0$　$\therefore -1<a<2$

これと $a \geq 0$ より，$0 \leq a<2$　・・・④　ならば 1 つの実数解をもつ。

$\begin{cases} 4x^2-(4a+1)x+a^2-2=0 \\ x \geq a \end{cases}$ の場合

$4x^2-(4a+1)x+a^2-2=0$ の判別式を D とすると，

$a \geq 0$ より，$D=(4a+1)^2-4\cdot 4\left(a^2-2\right)=8a+33>0$

よって，$4x^2-(4a+1)x+a^2-2=0$ は相異なる 2 つの実数解をもつ。

そこで，解を α, β （$\alpha<\beta$）とすると，必要条件は $a \leq \alpha<\beta$ または $\alpha<a \leq \beta$

$a \leq \alpha < \beta$ のとき

$(\alpha - a) + (\beta - a) > 0$ かつ $(\alpha - a)(\beta - a) \geq 0$ を満たせばよい。

$$\begin{aligned}(\alpha - a) + (\beta - a) &= \alpha + \beta - 2a \\ &= \frac{4a+1}{4} - 2a \quad \text{より，} \quad a < \frac{1}{4} \\ &= \frac{-4a+1}{4} > 0\end{aligned}$$

これと $a \geq 0$ より，$0 \leq a < \dfrac{1}{4}$ ・・・⑤

$$\begin{aligned}(\alpha - a)(\beta - a) &= \alpha\beta - a(\alpha + \beta) + a^2 \\ &= \frac{a^2 - 2}{4} - a \cdot \frac{4a+1}{4} + a^2 \\ &= \frac{a^2 - a - 2}{4} \\ &= \frac{(a+1)(a-2)}{4} \geq 0\end{aligned}$$

これと $a \geq 0$ より，$a \geq 2$ ・・・⑥

よって，⑤かつ⑥を満たす a は存在しないから，不適

$\alpha < a \leq \beta$ のとき

$(\alpha - a)(\beta - a) \leq 0$ かつ $\alpha \neq a$

$(\alpha - a)(\beta - a) = \dfrac{(a+1)(a-2)}{4} \leq 0$ より，$-1 \leq a \leq 2$

これと $a \geq 0$ より，$0 \leq a \leq 2$

$4x^2 - (4a+1)x + a^2 - 2 = 0$ の解が a ならば

$4a^2 - (4a+1)a + a^2 - 2 = (a+1)(a-2) = 0$

これと $a \geq 0$ より，$a = 2$

これを $4x^2 - (4a+1)x + a^2 - 2 = 0$ 代入すると，$4x^2 - 9x + 2 = 0$ より，

$(4x-1)(x-2) = 0$

よって，$\alpha = \dfrac{1}{4}$, $\beta = 2$ となり，$\alpha \neq 2$ すなわち $\alpha \neq a$

ゆえに，$0 \leq a \leq 2$ ・・・⑦ ならば 1 つの実数解をもつ。

④と⑦より，相異なる 2 実数解をもつには $0 \leq a < 2$ において，

$x = a^2 - 2$ と $4x^2 - (4a+1)x + a^2 - 2 = 0$ が同じ解をもたなければよい。

そこで，$4x^2 - (4a+1)x + a^2 - 2 = 0$ に $x = a^2 - 2$ を代入すると，

$4(a^2-2)^2 - (4a+1)(a^2-2) + a^2 - 2 = 4(a^2-2)(a+1)(a-2) = 0$ より，$a = \sqrt{2}$

よって，$x = a^2 - 2 = 0$

これより，$x = 0$ は $4x^2 - (4a+1)x + a^2 - 2 = 0$ の解でもあるが，

$0 < \sqrt{2}$ より，$x \geq a$ を満たさない。

ゆえに，相異なる 2 実数解をもつ条件は $0 \leq a < 2$　・・・⑧

$a < 0$ のとき

③より，$\begin{cases} 4x^2 - (4a+1)x + a^2 - 2 = 0 \\ x \geq \dfrac{a}{2} \end{cases}$ が相異なる 2 つの実数解をもてばよい。

$4x^2 - (4a+1)x + a^2 - 2 = 0$ の判別式を D とすると，

$D = (4a+1)^2 - 4 \cdot 4(a^2 - 2) = 8a + 33$

よって，$a < 0$ において，$4x^2 - (4a+1)x + a^2 - 2 = 0$ が相異なる 2 つの実数解をもつ条件は，

$-\dfrac{33}{8} < a < 0$　・・・⑨

このときの解を γ, δ （$\gamma < \delta$）とすると，$\dfrac{a}{2} \leq \gamma < \delta$ を満たせばよいから，

$\left(\gamma - \dfrac{a}{2}\right) + \left(\delta - \dfrac{a}{2}\right) > 0$ かつ $\left(\gamma - \dfrac{a}{2}\right)\left(\delta - \dfrac{a}{2}\right) \geq 0$

$\left(\gamma - \dfrac{a}{2}\right) + \left(\delta - \dfrac{a}{2}\right) = \gamma + \delta - a = \dfrac{4a+1}{4} - a = \dfrac{1}{4} > 0$

$\left(\gamma - \dfrac{a}{2}\right)\left(\delta - \dfrac{a}{2}\right) = \gamma\delta - \dfrac{a}{2}(\gamma + \delta) + \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{a^2 - 2}{4} - \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{4a+1}{4} + \dfrac{a^2}{4} = -\dfrac{a+4}{8} > 0$

よって，$a < -4$　・・・⑩

⑨かつ⑩より，$-\dfrac{33}{8} < a < -4$　・・・⑪

以上より，

定数 a の値の範囲は，⑧または⑪，すなわち $0 \leq a < 2$ または $-\dfrac{33}{8} < a < -4$　・・・(答)

44

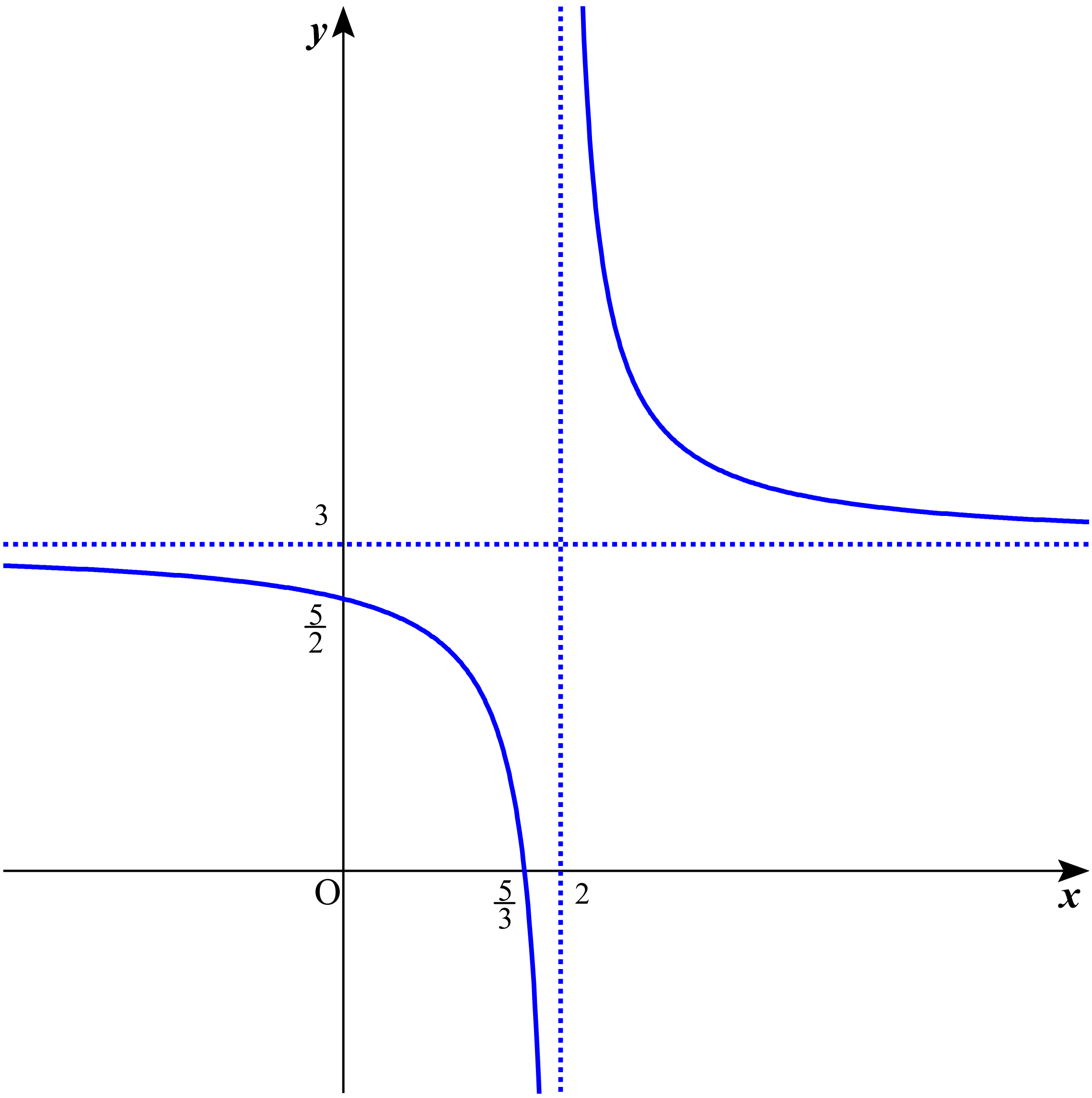
(1)

与式より， $xy-3x-2y+5=0$

これと $xy-3x-2y+5=(x-2)(y-3)-1$ より， $(x-2)(y-3)=1$

これより， $y=\dfrac{1}{x-2}+3$

実線がグラフ，破線は漸近線



(2)

$x+y=k$ とおくと，$y=-x+k$ より，k は直線 $y=-x+k$ と y 軸との交点である。
条件より，$y=-x+k$ が(1)のグラフと共有点をもつ条件の下，
$y=-x+k$ の k が最大値をもつための a の条件とそのときの最大値を求めればよい。

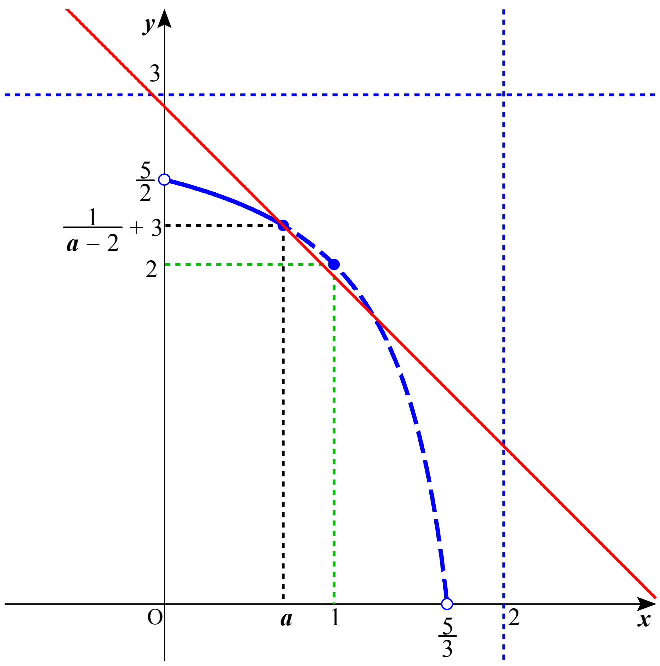
(1)のグラフにおいて，$\displaystyle\lim_{x\to 2+0} y=\lim_{x\to 2+0}\left(\frac{1}{x-2}+3\right)=\infty$ より，

$a>2$ とすると，$y=-x+k$ が通ることができる点の y 座標はいくらでも大きくできるため，
k の最大値は存在しない。
したがって，正数 a が $a>2$ でないこと，すなわち $0<a\leq 2$ が必要である。
つぎに，$0<x\leq 2$ における(1)のグラフと $y=-x+k$ の接点の座標を求める。
$xy=3x+2y-5$ の y に $y=-x+k$ を代入し，x について整理すると，
$x^2+(1-k)x+2k-5=0$ （$0<x\leq 2$）　・・・①
この方程式の判別式を D とすると，$D=(1-k)^2-4(2k-5)=(k-3)(k-7)$
接するとき $D=0$ となるから，$k=3,\ k=7$

①の重解を α とすると，解と係数の関係から $2\alpha=-(1-k)$ より，$\alpha=\dfrac{k-1}{2}$ だから，

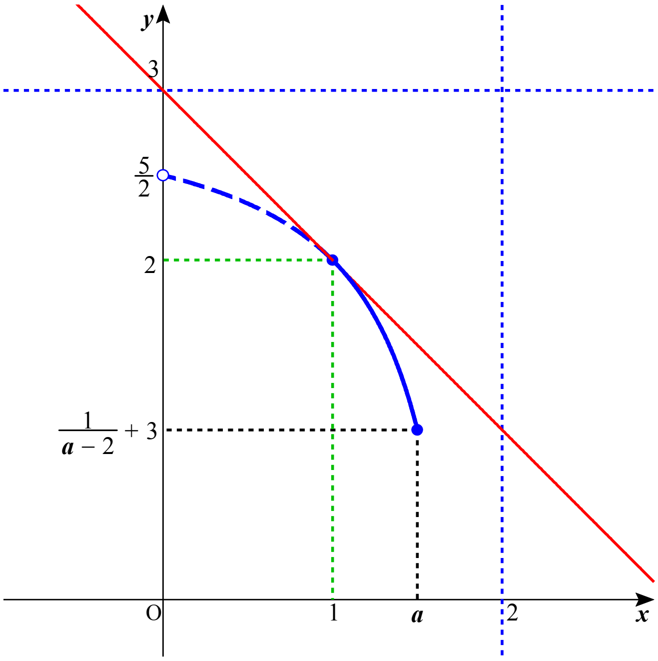
$k=7$ のとき $\alpha=3$，$k=3$ のとき $\alpha=1$
よって，$k=3$ のとき $0<x\leq 2$ における(1)のグラフと $y=-x+k$ は点 $(1,\ 2)$ で接する。
したがって，k の最大値は $0<a<1$ と $1\leq a\leq 2$ で場合分けすればよい。
(i)　$0<a<1$ のとき

下図より，点 $\left(a,\ \dfrac{1}{a-2}+3\right)$ を通るとき k は最大値 $a+\dfrac{1}{a-2}+3=\dfrac{a^2+a-5}{a-2}$ をとる。



(ii) $1 \leq a \leq 2$ のとき

下図より，点 $(1,\ 2)$ を通るとき k は最大値 $1+2=3$ をとる。



以上より，

最大値をもつための a の条件は $0 < a \leq 2$ で

$0 < a < 1$ のとき，最大値 $\dfrac{a^2+a-5}{a-2}$

$1 \leq a \leq 2$ のとき，最大値 3 をとる。

45

(1)

$a \neq p$ より，$m=\dfrac{q-b}{p-a}$

よって，$k=\dfrac{a+b-p-q}{a-b-p+q}=\dfrac{-(q-b)-(p-a)}{(q-b)-(p-a)}=-\dfrac{\dfrac{q-b}{p-a}+1}{\dfrac{q-b}{p-a}-1}=-\dfrac{m+1}{m-1}$

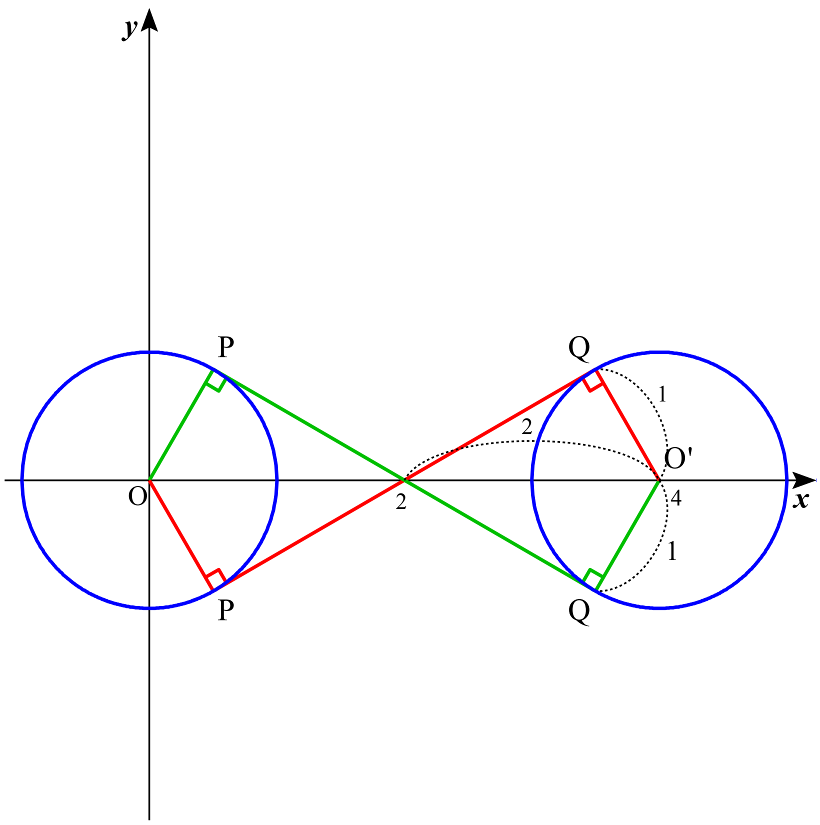
(2)

ある円とその円の外部の 2 円について，それぞれの円の周上の点を通る直線を l_1，中心を通る直線を l_2 とすると，l_1 と l_2 のなす鋭角の大きさは l_1 が 2 円の共通接線のとき最大となる。
問題の場合，中心を通る直線は x 軸だから，その傾きは 0 である。
したがって，傾きが正の共通接線で m は最大値を，負の共通接線で最小値をとる。
下図より，共通接線と x 軸のなす角は $30°$ であることがわかる。

よって，m の最大値は $\tan 30°=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，最小値は $\tan(-30°)=-\tan 30°=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

また，m は最大値と最小値の範囲で連続な値をとれる。

ゆえに，$-\dfrac{1}{\sqrt{3}} \leq m \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$　・・・(答)



$k=-\dfrac{m+1}{m-1}=-\dfrac{2+(m-1)}{m-1}=-\dfrac{2}{m-1}-1$ より，

$k=-\dfrac{2}{m-1}-1\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\leq m\leq\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ のグラフは下図青色実線

よって，$2-\sqrt{3}\leq k\leq 2+\sqrt{3}$ ・・・(答)